Kilka zadań, o których warto pomyśleć

1. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (-2,2) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna we wszystkich punktach przedziału $[-1,1]$ i $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ dla każdego n i każdego $x \in [-1,1]$, to funkcja ta jest analityczna w przedziale $(-1,1)$ promień zbieżności i promień zbieżności jej szeregu Maclaurina nie jest mniejszy niż 1.

2. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna oraz $|f^{(n)}(x)| \leqslant c^n$ dla każdego $x \in (a,b)$ i każdego $n \in \mathbb{Z}$, to dla dowolnych $x, x_0 \in (a,b)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

3. Niech $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$ dla $x < 1$. Znaleźć $F^{(n)}(0)$.

4. Znaleźć przedział zbieżności szeregu potęgowego

a. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} x^n$, $p \in \mathbb{R}$;

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\big(3^n + (-2)^n\big)x^n$;

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x+1)^n$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot(2n)}\big)^p x^n$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} x^n$, $a \in (0,1)$;

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \big(1+\frac{1}{n}\big)^{n^2} x^n$;

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\big)x^n$;

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$;

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} x^n$;

j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin^n n} x^n$;

k. $\sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{1}{\ln n}\big)^n \big(1 + 2\cos\frac{n\pi}{4}\big)x^n$;

l. $\sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{1}{n}a^n + \frac{1}{n^2}b^n\big)^{n^2} \big(\frac{x+1}{2}\big)^n$, gdzie $a > 0$, $b > 0$;

m. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 10^{\ell(n)}(2-x)^n$, $\ell(n)$ to liczba cyfr liczby n.

5. Przedstawić funkcję $\ln(2 + 2x + x^2)$ w postaci $\sum a_n(x+1)^n$.

6. Przedstawić funkcję $(1-x)^{-1}$ w postaci $\sum a_n \frac{1}{x^n}$.

7. Przedstawić funkcję $\ln x$ w postaci $\sum a_n \big(\frac{x+1}{x-1}\big)^n$.

8. Przedstawić funkcję $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ w postaci $\sum a_n \big(\frac{x}{1+x}\big)^n$.

9. Zsumować szereg

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$;

b. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$;

c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot(2n)} x^n$;

f. $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$;

g. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n$;

h. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

10. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną. Załóżmy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = g(x)$, przy czym na każdym przedziale ograniczonym ta zbieżność jest jednostajna. Dowieść, że istnieje taka liczba c, że $f(c) = ce^x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

11. Ile pochodnych ma funkcja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(nx)$?

12. Niech $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x)$, jeśli $\frac{1}{2^{n+1}} < x < \frac{1}{2^n}$ oraz $f_n(x) = 0$ dla pozostałych x z przedziału $[0,1]$. Dowieść, że szereg $\sum f_n$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0,1]$ oraz $\sum \sup\{f_n(x)\colon \quad x \in [0,1]\} = \infty$.
Oznacza to, ze zbieżności jednostajnej tego szeregu nie można stwierdzić za pomocą kryterium Weierstrassa.

13. Niech $f_n(x) = \frac{nx}{1+x^n} \sin \frac{x}{n}$ dla $x > -1$. Na jakich przedziałach ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny?

14. Niech $f_n(x) = \frac{3^n x^2 + n! x + 3^n}{n! \cdot (1+x^2)}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Na jakich przedziałach ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny?

15. Niech $f_n(x) = \frac{\sin nx \operatorname{arctg} nx}{n}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Na jakich przedziałach ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny?