Kilka zadań do przemyślenia „w domu”

4 maja doszło kilka zadań.

1. Obliczyć całki $\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$ i $\int \frac{x^5}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$

2. Obliczyć $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, jeśli $f(x) =$

a. $x + 3x^2 - 12x^4$ **ą.** $x(1+x^2)^4$ **b.** e^{2x}

c. $\sin 3x$ **ć.** $x\sin(x^2)$ **d.** $\frac{1}{1+4x^2}$

e. $\frac{x}{1+4x^2}$ **ę.** $\frac{1}{1+3x^2}$ **f.** $\frac{1}{2+3x^2}$

g. $\frac{x^2+2x-2}{2+3x^2}$ **h.** $\operatorname{tg} x$ **i.** $\frac{1}{1+2x}$

j. $\frac{x}{1+2x}$ **k.** $\frac{x^2+2x+3}{x+2}$ **l.** $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$

ł. $\frac{x}{(x+1)(x-2)}$ **m.** $\sin x\cos x$ **n.** $\frac{e^x}{1+e^x}$

ń. $x^2\sqrt{x^3-1}$ **o.** $e^{\sqrt{x}}$ **ó.** $x\sin 2x$

p. $x^2\sin x$ **q.** xe^x **r.** x^2e^{2x}

s. $\operatorname{arctg} x$ **ś.** $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ **t.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

u. $\sin^3 x$ **w.** $\frac{1}{\sin^2 x}$ **x.** $\cos x\cdot e^{\sin x}$

y. $\frac{\ln x}{x}$ **z.** $e^x\sin x$ **ż.** $e^{2x}\sin 5x$

ź. $\frac{1}{(1+e^x)^2}$ α. $\frac{1}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$ β. $\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x$

γ. $x^2e^{3x}\sin 4x$ δ. $\cos^2\sqrt{x}$ ε. $\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{3/2}}$

ζ. $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x$ η. $x\ln(1+x^4)$ θ. $x^x(1+\ln x)$

3. Obliczyć całki oznaczone (niektóre funkcje podcałkowe nie są zdefiniowana w pewnych punktach, ale to nie powinno szkodzić).

a. $\int_1^{\sqrt[4]{3}} x\operatorname{arctg}(x^2)\,\mathrm{d}x$ **ą.** $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **b.** $\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

c. $\int_0^2 x^2\ln(x^2+4)\,\mathrm{d}x$. **ć.** $\int_1^e \frac{\ln x^7}{x}\,\mathrm{d}x$ **d.** $\int_0^{\pi/2} x^2\sin(5x)\,\mathrm{d}x$

e. $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sin x\cos x\ln(1+\sin x)\,\mathrm{d}x$ **ę.** $\int_0^1 x^3\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$ **f.** $\int_{-1}^1 xe^{2x}\,\mathrm{d}x$

g. $\int_0^{\pi/2}\sin x\cos x\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$ **h.** $\int_0^{\pi^3}\sin\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$ **i.** $\int_0^{\pi/2} x^2\sin(5x)\,\mathrm{d}x$

j. $\int_{-\pi/2}^0\sin x\cos x\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$ **k.** $\int_1^e \frac{\ln x^7}{x}\,\mathrm{d}x$ **l.** $\int_0^{\pi/2} x^2\sin(5x)\,\mathrm{d}x$

ł. $\int_0^2 x(1+x^2)^{-1/2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$ **m.** $\int_{-1}^1 x\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$ **n.** $\int_{-2}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

ń. $\int_0^{\pi/2}\sin x\cos x\sin(\cos x)\,\mathrm{d}x$ **o.** $\int_0^\infty x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x$ **ó.** $\int_0^\infty x^3e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

p. $\int_0^{\pi/2}\sin x\cos x\sqrt[3]{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$ **q.** $\int_{-1}^1 |x|\,\mathrm{d}x$ **r.** $\int_0^1 x^2\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

s. $\int_0^{\pi/2}\sin^3 x\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ **ś.** $\int_{-1}^1\left[x^{15}\cdot\sqrt{1+3x^8}\,\right]\mathrm{d}x$ **t.** $\int_0^{\pi/4}\frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

u. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\sin(\operatorname{tg} x)\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^2\,\mathrm{d}x$ **v.** $\int_0^1 x(1+x^2)\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$ **w.** $\int_0^{\pi/3}\frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

x. $\int_0^{\pi/2} e^{-\operatorname{tg} x}\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^2\,\mathrm{d}x$ **y.** $\int_{-1}^1(|x|)'(x^2+x)\,\mathrm{d}x$ **z.** $\int_1^{10}\frac{|x-5|}{x-5}(x^2+1)\,\mathrm{d}x$

ż. $\int_0^{\pi/4} x\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,\mathrm{d}x$ **ź.** $\int_{-10}^{10}|x^2-5x+6|\,\mathrm{d}x$

4. Udowodnić, że jeśli $f\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1, to istnieje taki ciąg wielomianów (w_n), że $w_n \rightrightarrows f$ i $w_n' \rightrightarrows f'$.

5. Udowodnić, że każda funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest granicą punktowo zbieżnego ciągu wielomianów. Czy jest też granicą niemal jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów?

6. Niech $f(0) = 0$ oraz $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Czy istnieje taka funkcja $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in \$$? Jeśli tak, znaleźć ją.

7. Niech $f(0) = 0$ i $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, $g(0) = \frac{1}{2}$ i $g(x) = \cos\frac{1}{x}$. Dowieść, że jedna z funkcji f, g ma funkcję pierwotną określoną na całym $\mathbb{R}$, a druga takiej funkcji pierwotnej nie ma.

8. Rozstrzygnąć, czy iloczyn funkcji, które mają funkcje pierwotne, również ma funkcję pierwotną.

9. Niech w będzie wielomianem. Obliczyć całki $\int w(x)\sin x\,\mathrm{d}$ oraz $\int w(x)\cos x\,\mathrm{d}x$.

10. Niech $w_n(x) = \big(x(\pi - x)\big)^n$. Niech $I_n = \int_0^\pi w_n(x)\sin x\,\mathrm{d}x$. Udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} I_n = 0$ dla każdej liczby rzeczywistej q.

11. Obliczyć sumę szeregu $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4} + \ldots$.

12. Obliczyć sumę szeregu $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} + \ldots$.

13. Obliczyć sumę szeregu $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$.

14. Obliczyć sumę szeregu $1 - \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots$.

15. Obliczyć sumę szeregu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots$.