Kilka zadań, o których warto pomyśleć

1. Czy ciąg $\sqrt[n]{1+x^n}$ jest jednostajnie zbieżny na $[0,\infty)$?

2. Czy ciąg $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ jest jednostajnie zbieżny na $[a,b]$?

3. Czy szereg $\sum \frac{1}{1+(x-n)^2}$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$?

4. Czy szereg $\sum \frac{x^2}{n^4+x^4}$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$?

5. Czy szereg $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ jest jednostajnie zbieżny na $[0,\infty)$?

6. Dowieść, że szereg funkcyjny
$x(1-x) - x(1-x) + x^2(1-x) - x^2(1-x) + x^3(1-x) - x^3(1-x) + \cdots$
jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na przedziale $[0,1]$. Zmienić kolejność wyrazów tego szeregu tak, by nowy szereg nie był zbieżny jednostajnie na $[0,1]$.

7. Niech (f_n) będzie ciągiem ciągiem funkcyjnym określonym na przedziale $[a,b]$. Udowodnić, że jest on jednostajnie zbieżny do funkcji ciągłej $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy z równości $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

8. Wykazać, że istnieje ciąg (f_n) funkcji o ciągłych pierwszych pochodnych, którego granicą na przedziale domkniętym $[-1,1]$ jest funkcja $|x|$.

9. Dowieść, że jeśli funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale domkniętym $[a,b]$ oraz $f_n(x) = n\big(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\big)$, to $f_n \rightrightarrows f'$.

10. Niech $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ dla $x > 1$. Udowodnić, że funkcja ζ jest dobrze zdefiniowana oraz, że jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.