Kilka zadań, o których warto pomyśleć

poprawiłem o 17:23, 17 III 2018, po interwencji p. Michała K.

1. Obliczyć $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^a}$ w zależności od $a\in\mathbb{R}$.

2. Obliczyć, jeśli istnieje, granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$. Czy można użyć regułę de l'Hospitala (bez dodatkowych przekształceń)?

3. Obliczyć, jeśli istnieje, granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}$. Czy można użyć regułę de l'Hospitala (bez dodatkowych przekształceń)?

4. Obliczyć granicę

a. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$;

b. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}$

c. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg} x-1}{2\sin^2 x-1}$;

d. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1000}(1.001)^{-x}$;

e. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{-1/x}$;

f. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot e^{-x/1000}$;

g. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$;

h. $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$;

i. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$;

j. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x+e^x)\big((1+\frac{1}{x})^x-e\big)$.

5. Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$ oraz $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 x-\dfrac{1}{x^2}$.

6. Obliczyć $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{8x^3+6x^2}-ax$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{8x^3+6x}-ax$ w zależności od $a\in\mathbb{R}$.

7. Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x^4}-\cos x^9}{(\operatorname{tg} x-\sin x)\ln(1+\arcsin x)}$.

8. Niech a_n oznacza n-tą pochodną funkcji tangens w punkcie 0. Wykazać, że dla każdego n zachodzi równość $a_{2n}=0$. Wyrazić a_{4n-1} za pomocą a_1, a_3, a_5, $\ldots$, a_{4n-3} oraz a_{4n+1} za pomocą a_1, a_3, a_5, $\ldots$, a_{4n-1}. Wykazać, że dla każdej nieparzystej liczby n zachodzi nierówność $a_n>0$.

9. Znaleźć granicę $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1-x^2}-\cos x)e^{\sin(2x)-\operatorname{tg}(3x)}}{\ln(1+5x)(\operatorname{tg} x-x)\cos(\operatorname{tg} x)}$.

10. Znaleźć granicę $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)\cdot(\operatorname{tg} x-x)\cdot\cos(\sin x)\cdot(\sqrt{64+x}-8)}{\sin^2 x\cdot\left(\sqrt{1-\operatorname{tg}(x^2)}-\cos x\right)\cdot 2^{\sin(3x)-\operatorname{tg} x}}$.

11. Udowodnić, że jeśli $f^{(n)}(x)=0$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$, to funkcja f jest wielomianem stopnia mniejszego niż n.

12. Wykazać, że dla każdego wielomianu w i każdych $h,p\in\mathbb{R}$ zachodzi równość $w(p+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}w^{(n)}(p)$.

13. Dowieść, że funkcja $e^x\big(x^ne^{-x}\big)^{(n)}$ jest wielomianem, który ma n różnych pierwiastków dodatnich.

14. Dowieść, że jeśli $a>0$, $b>0$, $c>0$ i $a\neq b\neq c\neq a$, to $a^ab^bc^c>\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$.

15. Dowieść, że jeśli $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $a \neq b \neq c \neq a$, to $a^a b^b c^c < \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c}$.

16. Dowieść, że jeśli $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $a \neq b \neq c \neq a$, to
$$(b+c)^a (c+a)^b (a+b)^c < \left(\tfrac{2}{3}(a+b+c)\right)^{a+b+c}.$$

17. Wykazać, że $\ln x < \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ dla $0 < x \neq 1$.

18. Wykazać, że jeśli $x > 0$, $y > 0$ i $z > 0$, to zachodzi nierówność
$$x \ln x + 2y \ln y + 3z \ln z + (x + 2y + 3z) \ln 6 \geqslant \geqslant (x + 2y + 3z) \ln(x + 2y + 3z).$$
Kiedy zachodzi równość?

19. Wykazać, że nierówność $\left(\frac{x+2y}{3}\right)^{\frac{x+2y}{3}} < \frac{x^x+2y^y}{3}$ zachodzi dla dowolnych *różnych* liczb rzeczywistych dodatnich x, y.

20. Wykazać, że $(2 - \sqrt{3})a^{2+\sqrt{3}} + (2 + \sqrt{3})b^{2-\sqrt{3}} \geqslant 4\sqrt[4]{ab}$ dla dowolnych $a > 0$ i $b > 0$.

21. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b równanie $\ln x = ax + b$ ma dokładnie dwa rozwiązania, dokładnie jedno rozwiązanie lub nie ma rozwiązań w ogóle.

22. Dowieść, że $2^{1-p} \leqslant x^p + (1 - x)^p \leqslant 1$ dla dowolnych liczb $p > 1$ i $x \in [0, 1]$.

23. Dowieść, że jeśli $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, to zachodzą nierówności:
a. $\sin(x + y + z) < \sin x + \sin y + \sin z$**;**
b. $\alpha - \sin\alpha < \beta - \sin\beta$**;**
c. $\operatorname{tg}\alpha - \alpha < \operatorname{tg}\beta - \beta$**.**

24. Niech $\alpha, \beta, \gamma > 0$ i $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Dowieść, że wtedy:

a. $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}$;

b. $\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

c. $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geqslant \frac{3}{4}$;

d. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geqslant \sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma)$.

Wyjaśnić, kiedy zachodzi równość.

25. Korzystając z wklęsłości funkcji sinus na przedziale $[0, \pi]$ udowodnić, że spośród n–kątów wpisanych w dany okrąg, największy obwód ma n–kąt foremny.

26. Korzystając z wypukłości funkcji tangens na przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$ dowieść, że spośród n–kątów opisanych na danym okręgu, najmniejszy obwód ma n–kąt foremny.

27. Dowieść, że spośród n–kątów wpisanych w dany okrąg, największe pole ma n–kąt foremny.

28. Dowieść, że spośród n–kątów opisanych na danym okręgu, najmniejsze pole ma n–kąt foremny.

29. Dowieść, że kresem górnym obwodów wielokątów wpisanych w okrąg o promieniu $r > 0$ jest liczba $2\pi r$, a kresem górnym ich pól jest liczba πr^2.

30. Dowieść, że kresem dolnym obwodów wielokątów opisanych na okręgu o promieniu $r > 0$ jest liczba $2\pi r$, a kresem dolnym ich pól wielokątów jest liczba πr^2.

31. Znaleźć maksimum objętości stożka wpisanego w kulę o promieniu 1.

32. Znaleźć minimum objętości stożka opisanego na kuli o promieniu 1.

33. Znaleźć maksimum obwodu trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 1.

34. Znaleźć maksimum długości statku, który może wpłynąć z kanału o szerokości $a > 0$ do prostopadłego doń kanału, którego szerokość jest równa $b > 0$.

35. Dowieść, że jeśli $0 < x < \frac{\pi}{2}$, to $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$.

36. Dowieść, że jeśli $x > 0$, to $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

37. Dowieść, że jeśli $x > 1$ i $p > 1$, to $x^p - 1 > p(x-1)$.

38. Dowieść, że jeśli $x > 0$, to $1 + 2\ln x \leq x^2$.

Na koniec sformułuję i udowodnię twierdzenie, które pojawi się za jakiś czas na wykładzie, ale zostało sformułowane w czasie ćwiczeń 16 marca. Oczywiście nie ma konieczności czytania tego teraz, ale gdyby ktoś chciał ujrzeć dowód, to go zamieszczam.

Twierdzenie Abela (o ciągłości szeregu potęgowego w końcu przedziału zbieżności). Załóżmy, że dany jest taki ciąg (a_n) i taka liczba $r > 0$, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ jest zbieżny. Niech $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dla $x \in (-r, r]$. Wtedy funkcja f jest ciągła w punkcie r.

Dowód. Dla uproszczenia oznaczeń założymy, że promień zbieżności szeregu potęgowego równy jest 1 oraz że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.[1]

Przyjmijmy $s_{n,k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}$ i $s_{n,\infty} = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots$ Mamy wtedy

$$a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots + a_{n+k}x^{n+k} =$$
$$= s_{n,1}x^{n+1} + (s_{n,2} - s_{n,1})x^{n+2} + \ldots + (s_{n,k} - s_{n,k-1})x^{n+k} =$$
$$= (1-x)\big(s_{n,1}x^{n+1} + s_{n,2}x^{n+2} + \ldots + s_{n,k-1}x^{n+k-1}\big) + s_{n,k}x^{n+k}.$$

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, więc spełnia warunek Cauchy'ego, więc dla dostatecznie dużych n i dowolnych k zachodzą nierówności $|s_{n,1}| < \varepsilon$, $|s_{n,2}| < \varepsilon$, ..., $|s_{n,k}| < \varepsilon$ i w konsekwencji $|s_{n,\infty}| \leqslant \varepsilon$. Stąd, z tego, że $0 \leqslant x \leqslant 1$ i z poprzednich równości wynika, że $\left|s_{n,k}x^{n+k}\right| < \varepsilon$ oraz

$$\left|(1-x)\big(s_{n,1}x^{n+1} + s_{n,2}x^{n+2} + \ldots + s_{n,k-1}x^{n+k-1}\big)\right| \leqslant \varepsilon(1-x)\big(x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots + x^{n+k-1}\big) =$$
$$= \varepsilon\big(x^{n+1} - x^{n+k}\big) < \varepsilon,$$

więc $\left|a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots + a_{n+k}x^{n+k}\right| < 2\varepsilon$, zatem też $\left|a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots\right| \leqslant 2\varepsilon$ dla $x \in [0,1]$. Mamy wobec tego

$$|f(x) - f(1)| \leqslant |a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n - (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)| +$$
$$+ |a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots| + |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots| \leqslant$$
$$\leqslant |a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n - (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)| + 4\varepsilon.$$

Ustalamy teraz n spełniające powyższe warunki. Funkcja $x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ jest ciągła w punkcie 1 (jako suma skończenie wielu funkcji ciągłych), więc istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $1 - \delta < x < 1$, to

$$|a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n - (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)| < \varepsilon.$$

Z tej nierówności wynika natychmiast, że wtedy $|f(x) - f(1)| < 5\varepsilon$, a to oznacza ciągłość funkcji f w punkcie 1. Dowód został zakończony.

[1] Nie zmniejsza to ogólności rozważań, bo można przyjąć, że $x = tr$ dla $t \in (-1, 1]$ i dowodzić ciągłości funkcji $t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n t^n = f(tr)$ w punkcie 1.