Kilka zadań, o których warto pomyśleć

1. Zdefiniować różnowartościową funkcje ciągłą przekształcającą półprostą $(0, \infty)$ na $\mathbb{R}$.

2. Czy istnieje różnowartościowa funkcja jednostajnie ciągła przekształcającą półprostą $(0, \infty)$ na $\mathbb{R}$?

3. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, to dla każdej liczby $d > 0$ istnieje taka liczba M, że jeśli $|x_1 - x_2| \leqslant d$, to $\big|f(x_1) - f(x_2)\big| \leqslant M$.

4. Znaleźć wszystkie przedziały, na których funkcja $\sin \sqrt[3]{x}$ jest jednostajnie ciągła.

5. Znaleźć wszystkie przedziały, na których funkcja $\sin x^3$ jest jednostajnie ciągła.

6. Wykazać, że jeśli funkcja ściśle wypukła jest ciągła i **nie** jest monotoniczna, to ma wartość najmniejszą i ta najmniejsza wartość jest przyjmowana w dokładnie jednym punkcie, przy czym jest to punkt wewnętrzny dziedziny funkcji.

7. Podać przykład dwu funkcji dodatnich ściśle wypukłych, których iloczyn jest ściśle wklęsły.

8. Wykazać, że jeśli $0 \leqslant L < 1$, $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, to istnieje dokładnie jedno takie $p \in \mathbb{R}$, że $f(p) = p$.
Rozstrzygnąć, czy z tego, że dla pewnej funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniony jest warunek $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ dla dowolnych **różnych** $x, y \in \mathbb{R}$, wynika, ze istnieje takie $p \in \mathbb{R}$, że $f(p)$.

9. Dowieść, że jeśli $f^3(x) + 3f(x) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to funkcja f jest różniczkowalna. Znaleźć liczby $f(0)$ oraz $f'(0)$.

10. Dowieść, że jeżeli $f(x) + e^{f(x)} = x$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to funkcja f jest różniczkowalna. Znaleźć liczby $f(1)$ oraz $f'(1)$.

11. Znaleźć wzór na $1 + 2x + 3x^3 + \cdots + nx^{n-1}$. Czy równość $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ może przydać się w trakcie poszukiwań?

12. Dowieść, że pochodna funkcji parzystej jest nieparzysta, a pochodna funkcji nieparzystej — parzysta.
Czy z tego, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i f' jest parzysta, wynika, że funkcja f jest nieparzysta?
Czy z tego, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i f' jest nieparzysta, wynika, że funkcja f jest parzysta?

13. Udowodnić, że jeśli $f''(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to istnieją takie liczby $a, b \in \mathbb{R}$, że $f(x) = ac + b$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

14. Udowodnić, że jeśli $f'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to istnieje taka liczba $c \in \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(x) = ce^x$.

15. Udowodnić, że jeśli $f''(x) = -f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to istnieją takie liczby $c, d \in \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(x) = c\cos x + d\sin x$.
Siła, przyspieszenie, zachowanie energii — o co tu może chodzić?

16. Dowieść, że pochodna różniczkowalnej funkcji okresowej jest okresowa. Czy z okresowości pochodnej f' wynika okresowość funkcji f?

17. Funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ma ciągłą pochodną w każdym punkcie przedziału (a,b). Czy wynika stąd, że dla każdej liczby $c \in (a,b)$ istnieją takie liczby $x, y \in [a,b]$, że $x < c < y$ i $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{(y-x)}$?

18. Niech funkcja $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\ln x) & \text{dla} \quad x > 0, \\ 0 & \text{dla} \quad \text{x=0.} \end{cases}$$

Niech $c(x)$ oznacza taką liczbę, że $f(x) - f(0) = xf'\big(c(x)\big)$ i $c(x) \in (0,x)$. Wykazać, że funkcja c ma punkty nieciągłości w każdym przedziale postaci $(0,d)$, $d > 0$.

19. Dowieść, że jeśli $p > 1$ i $0 < x < y$, to zachodzi nierówność

$$px^{p-1}(y-x) < y^p - x^p < py^{p-1}(y-x).$$

Jak jest dla $p \in (0,1)$?

20. Dowieść, że jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją nieograniczoną i różniczkowalną, to jej pochodna f' też jest nieograniczona.
Czy teza jest słuszna dla funkcji różniczkowalnej $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$?