

AM1.2 — zadania domowe 9, termin 29 maja (wtorek).

Rozwiązania zadań zbiorę we wtorek, 5 czerwca. Każde zadanie powinno być napisane na oddzielnej kartce i podpisane czytelnie (najlepiej drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem i nr indeksu autorki/autora tekstu.

W rozwiązaniach należy korzystać z twierdzeń udowodnionych w trakcie zajęć. Chcąc skorzystać z innych, trzeba je najpierw udowodnić.

1. Wykazać, że całka $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ jest zbieżna, czyli że istnieje skończona granica $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$.
Obliczyć całkę $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ korzystając ewentualnie z wzoru na $\sin 2\omega$ i trochę kombinując.
2. Niech $a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$ oraz $I_a(b) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} dx$. Obliczyć $\frac{d}{db} I_a(b)$ lub udowodnić, że ta pochodna nie istnieje (może to zależeć od b).
3. Korzystając z oznaczeń z poprzedniego zadania udowodnić, że $\lim_{a \rightarrow 0} I_a(b) = \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx$ oraz że $\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ dla każdego $b > 0$.