AM1.2 — zadania domowe 7, termin 8 maja (wtorek).

Poprawiłem zadanie 2. więc termin to 12 maja, godz. 12:15

Rozwiązania zadań zbiorę we wtorek, 8 maja. Każde zadanie powinno być napisane na oddzielnej kartce i podpisane czytelnie (najlepiej drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem i nr indeksu autorki/autora tekstu.

W rozwiązaniach należy korzystać z twierdzeń udowodnionych w trakcie zajęć. Chcąc skorzystać z innych, trzeba je najpierw udowodnić.

1. Udowodnić, że jeśli $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ jest funkcją ciągłą, to istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f: \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$, że $0 < f(x) < h(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

2. Udowodnić, że jeśli $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ jest funkcją ciągłą, to istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f: \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$, że $0 < f(x) < h(x)$ oraz $|f^{(j)}(x)| < h(x)$ dla $j = 1, 2$ i dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

3. Udowodnić, że jeśli $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną w sposób ciągły, to dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka funkcja $g_\varepsilon\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy C^2, że w pewnym otoczeniu punktu 0 spełniona jest równość $g_\varepsilon(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2}$, jeśli $|x| \geqslant 1$, to $f(x) = g_\varepsilon(x)$ oraz $|f^{(j)}(x) - g_\varepsilon^{(j)}(x)| < \varepsilon$ dla $j = 0, 1, 2$ oraz dla każdego $x \in \mathbb{R}$.