AM1.2 — zadania domowe 5, termin 24 kwietnia (wtorek).

Rozwiązania zadań zbiorę we wtorek, 24 kwietnia. Każde zadanie powinno być napisane na oddzielnej kartce i podpisane czytelnie (najlepiej drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem i nr indeksu autorki/autora tekstu.

W rozwiązaniach należy korzystać z twierdzeń udowodnionych w trakcie zajęć. Chcąc skorzystać z innych, trzeba je najpierw udowodnić.

1. Udowodnić, że istnieje taka niemalejąca nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, że $f(x) = 0$, gdy $x \leqslant 0$ i $f(x) = 1$, gdy $x \geqslant 1$ oraz taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, że $f(x) = 0$, gdy $|x| \geqslant 2$ i $g(x) = 1$, gdy $|x| \leqslant 1$ oraz $0 < g(x) < 1$, gdy $1 < |x| < 2$.

2. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna oraz $|f^{(n)}(x)| \leq c^n$ dla każdego $x \in (a,b)$ i każdego $n \in \mathbb{Z}$, to dla dowolnych $x, x_0 \in (a,b)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

3. Znaleźć szereg Maclaurina funkcji f, jeśli $f(x) =$

a. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$, **b.** $\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4}$, **c.** $\sin^3 x$.