AM1.2 — zadania domowe 4, termin 27 marca (wtorek).

Rozwiązania zadań zbiorę we wtorek, 27 marca. Każde zadanie powinno być napisane na oddzielnej kartce i podpisane czytelnie (najlepiej drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem i nr indeksu autorki/autora tekstu.

W rozwiązaniach należy korzystać z twierdzeń udowodnionych w trakcie zajęć. Chcąc skorzystać z innych, trzeba je najpierw udowodnić.

1. Udowodnić, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} n \ln n \geqslant \ln 4$

2. W wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o bokach a, b, c, gdzie $a^2 + b^2 = c^2$ wokół jego przeciwprostokątnej powstaje bryła o objętości V. Znaleźć wymiary trójkąta prostokątnego o obwodzie $1 = a + b + c$, dla którego V przyjmuje największą wartość.

3. Udowodnić, że funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorami $f(0) = 0$ i $f(x) = x + x^3(2 + \sin \frac{1}{x})$ dla $x \neq 0$ nie jest ani wypukła ani wklęsła na żadnym przedziale, którego końcem jest liczba 0. Obliczyć $f'(0)$. Czy istnieje $f''(0)$?
Jednocześnie: *$x \in (0,1) \Rightarrow f(x) > x$ oraz $x \in (-1,0) \Rightarrow f(x) < x$, więc z lewej strony punktu 0 wykres leży pod styczną, a z prawej — nad nią, choć 0* **nie** *jest punktem przegięcia funkcji f.*