AM1.2 — zadania domowe 3, termin 20 marca (wtorek).

Rozwiązania zadań zbiorę we wtorek, 20 marca. Każde zadanie powinno być napisane na oddzielnej kartce i podpisane czytelnie (najlepiej drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem i nr indeksu autorki/autora tekstu.

W rozwiązaniach należy korzystać z twierdzeń udowodnionych w trakcie zajęć. Chcąc skorzystać z innych, trzeba je najpierw udowodnić.

1. Niech $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, która ma pochodną w każdym punkcie przedziału (a,b). Dowieść, że jeżeli $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, to $f'(c) = 0$ dla pewnej liczby $c \in (a,b)$.

2. **a.** Dowieść, że jeśli $a,b \in \mathbb{R}$, $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją nieograniczoną i różniczkowalną, to jej pochodna f' też jest nieograniczona.

b. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, to istnieje taki ciąg (x_n), którego granicą jest ∞, że $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$.

3. Dowieść, że funkcja $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ jest ściśle rosnąca na każdej z półprostych $[1,\infty)$ i $(-\infty,-1)$.

4. Ile pierwiastków ma równanie $e^x = ax^2$ w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$?

5. Dowieść, że jeśli obie funkcje f, g są różniczkowalne na półprostej $[a,\infty)$ i $|f'(x)| \leqslant g'(x)$ dla każdego $x \geqslant a$, to nierówność $|f(x) - f(a)| \leqslant g(x) - g(a)$ zachodzi dla $x \geqslant a$.