AM1.2 — zadania domowe 2, termin 13 marca (wtorek).

Rozwiązania zadań zbiorę we wtorek, 13 marca. Każde zadanie powinno być napisane na oddzielnej kartce i podpisane czytelnie (najlepiej drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem i nr indeksu autorki/autora tekstu. W rozwiązaniach należy korzystać z twierdzeń udowodnionych w trakcie zajęć. Chcąc skorzystać z innych, trzeba je najpierw udowodnić.

---

1. **a.** Czy istnieje jednostajnie ciągła funkcja określona na półprostej $[0, \infty)$, która przekształca tę półprostą na $\mathbb{R}$?

b. Czy istnieje różnowartościowa funkcja ciągła określona na półprostej $[0, \infty)$, która przekształca tę półprostą na $\mathbb{R}$?

2. Wykazać, że jeśli funkcje f i g są wypukłe, funkcja g jest niemalejąca, to funkcja $g \circ f$ jest *wypukła*, jeśli natomiast g jest nierosnąca, to złożenie $g \circ f$ *może* być funkcją *wklęsłą*, *wypukłą* lub być ściśle wypukła na jednym przedziale, a na drugim ściśle wklęsła.

3. Niech $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$. Dowieść, że $f(e) = f(\pi)$.

4. Zdefiniować funkcję ciągłą $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, różniczkowalną w punktach $x \notin \{1, 2, \ldots, 100\}$, która nie ma jednostronnych pochodnych w punktach $x \in \{1, 2, \ldots, 100\}$.

5. Niech $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą w punkcie p, że funkcja $f^2 = f \cdot f$ jest różniczkowalna w punkcie p.
Dowieść, że funkcja f^k jest różniczkowalna w punkcie p dla dowolnej liczby naturalnej $k \geq 2$, tu: $f^{\ell+1}(x) = f^{\ell}(x) \cdot f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Czy z założeń o funkcji f wynika, że jest ona różniczkowalna w punkcie p?