„Dwa” słowa o symbolach o i O.

W wielu sytuacjach istotna jest jedynie prędkość zbieżności jakiejś funkcji do pewnej granicy i interesuje nas to jedynie w niewielkim otoczeniu jakiegoś punktu. Ponieważ sytuacje takie są częste, więc wprowadzane są oznaczenia ułatwiające życie tym osobom, które zrozumieją, jak można ich używać.

Piszemy, że $f(x) = o(g(x))$ przy $x \to a \in [-\infty, \infty]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Możemy powiedzieć, że funkcja f jest niższego rzędu niż funkcja g przy x dążącym do a. Ostatnia część zdania często pozostaje w domyśle, bo jest jasne o jakie a chodzi.

Litera o (zresztą O też pochodzi łacińskiego słowa *ordo* oznaczającego rząd, warstwę itp. W dzisiejszych czasach można pomyśleć o angielskim słowie *order,* bo w jakimś sensie angielski pełni obecnie prawie taką rolę, jak łacina w średniowieczu.

Piszemy $f(x) = O(g(x))$ przy $x \to a \in [-\infty, \infty]$ wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ jest ograniczony w pewnym otoczeniu a.

Możemy więc napisać np. $\sin x = x + o(x)$ przy $x \to$), bo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \mathbf{x}}{x} = 0$. Możemy też napisać, że $\sin x = x + o(x^2)$ przy $x \to 0$, bo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \mathbf{x}}{x^2} = 0$. Nie możemy jednak wywnioskować z równości $x + o(x) = \sin x = x + o(x^2)$, że $o(x) = o(x^2)$ przy $x \to 0$. Rzecz w tym, że używając symbolu o nie precyzujemy dokładnie o jaką funkcję idzie, lecz podajemy pewną własność funkcji i nic więcej. Możemy też napisać $\sin x = x + O(x^3)$ przy $x \to 0$, bo iloraz $\frac{x - \sin x}{x^3}$ jest funkcją ograniczoną w pewnym otoczeniu 0. Ogólnie jest prawdą, że $O(x^2) = o(x)$, ale **nie** jest prawdą, że $o(x) = O(x^2)$. Jeśli $f(x) = O(x^2)$ przy $x \to 0$, to istnieje taka liczba $C > 0$, że $|f(x)| \leqslant C \cdot x^2$, gdy $0 < |x| < \delta$, gdzie δ jest dostatecznie małą liczbą dodatnią. Wtedy jednak można napisać: $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant C|x|$ i z równości $0 = \lim\limits_{x\to 0} C|x|$ wynika równość $0 = \lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{f(x)}{x}\right|$, a to właśnie oznacz, że $f(x) = o(x^2)$. Jeśli jednak $f(x) = x\sqrt{|x|}$, to $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{|x|}$, więc $f(x) = o(x)$ przy $x \to 0$, ale $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$, zatem **nie jest prawdą,** że $f(x) = O(x^2)$.

Należy myśleć o równości $f(x) = o(x)$ raczej jak o zdaniu niż jako o równości, choć pisanie tych równości i stosowanie tych oznaczeń bardzo skraca sformułowania wielu twierdzeń czyniąc je w ten sposób łatwiejszymi do przyswojenia przez osoby, które opanowały opisany sposób wyrażania swych myśli. Po wprawieniu się w tym używamy tych oznaczeń bez namyślania się nad definicjami. Podobnie jest w języku. Każdy wie czym jest *stołek,* a czym *stół* i czym jest *krzesło,* choć podanie dokładnych definicji tych przedmiotów może wcale nie być proste, zwłaszcza rozróżnienie stołu od stołka, z krzesłem jest nieco łatwiej, bo ono w zwykłym rozumieniu tego słowa ma oparcie. Tym niemniej prawie każdy Polak (następny termin nie do końca zdefiniowany) wie, o czym mowa.

W zasadzie mogą Państwo napisać

$$o(x^5) = o(x^4) = o(x^3 = o(x^2) = o(x) = o(1),$$

ale np. z równości $f(x) = o(1)$ przy $x \to 0$ nie wynika równość $f(x) = o(x)$ przy $x \to 0$. Trzeba więc uważać, rozumieć sens napisów i używać tych oznaczeń, bo na ogół krótsze zdania są bardziej zrozumiałe od długich (nie zawsze).

Na deser zadanie omówione kiedyś na ćwiczeniach

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{\sin(\operatorname{tg} x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-(1-(-x^2)+o(x^2))}}{\operatorname{tg} x+o(\operatorname{tg} x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2-o(x^2)}}{\operatorname{tg} x+o(\operatorname{tg} x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+o(x^2)}}{x+o(x)+o(\operatorname{tg} x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot\sqrt{1+o(1)}}{x+o(x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot\sqrt{1+o(1)}}{x\cdot(1+o(1))} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+o(1)}}{1+o(1)} = 1.$$

I jeszcze jedno zadanie. Załóżmy, że $f(1) = 4 = f'(1)$ oraz że funkcja f jest zdefiniowana w pewnym otoczeniu punktu 1 i jest w nim różniczkowalna. Mamy więc

$f(1+h) = f(1)+f'(1)h+o(h) = 4+4h+o(h)$ oraz $f(1+3h) = f(1)+f'(1)(3h)+o(3h) = 4+12h+o(h)$.

Wobec tego możemy napisać:

$$\ln\left(\frac{f(1+h)}{f(1+3h)}\right)^{1/h} = \frac{1}{h}\Big(\ln(4+4h+o(h)) - \ln(4+12h+o(h)\Big) =$$
$$= \frac{1}{h}\Big(\ln 4 + \ln(1+h+o(h)) - \ln 4 - \ln(1+3h+o(h))\Big) = \frac{1}{h}\Big(\ln(1+h+o(h)) - \ln(1+3h+o(h))\Big) =$$
$$= \frac{1}{h}\Big(h+o(h)+o(h+o(h)) - (3h+o(h)+o(3h+o(h)))\Big) = \frac{1}{h}(-2h+o(h)) = -2,$$ zatem szukana granica to e^{-2}.

Po drodze korzystałem z oczywistych równości typu (wszystko przy $t \to 0$) $\sin t = t + o(t)$, $\operatorname{tg} t = t + o(t)$, $o(t) = o(3t)$, $o(t) = o(\sin t) = o(\operatorname{tg} t) = o(\sin(\operatorname{tg} t))$ i być może jeszcze kilku innych.