O zadaniu trzecim z kolokwium kwietniowego.

1. Obliczyć poniższą granicę lub uzasadnić jej nieistnienie:

(B) $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x(2-2\cos(\sin(x)))} - \frac{1}{x \operatorname{arctg}(x)},$$

(A) $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos x(x^2-\ln(\cos x))} - \frac{1}{3x \operatorname{arctg} x}.$$

Rozwiązanie. Przypomnijmy wzory

(1) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, (2) $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$,

(3) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$, (4) $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$,

(5) $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.

Ponieważ $1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, więc dla każdego n mamy $o(\sin^n x) = o(\operatorname{tg}^n x) = o(x^n)$.

Zaczniemy od najładniejszego rozwiązania zadania trzeciego. Zachodzą równości

$2\cos x(x^2 - \ln(\cos x)) = 2x^2\cos x + \cos x \ln(\cos^{-2}(x))) =$
$= 2x^2\cos x + \cos x \ln(1+\operatorname{tg}^2 x) = 2x^2 \cos x + \cos x(\operatorname{tg}^2 x - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{2} + o(\operatorname{tg}^4 x)) =$
$= 2x^2 - x^4 + o(x^4) + (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))(x^2 + \frac{2x^4}{3} - \frac{x^4}{2} + o(x^4)) =$
$= 2x^2 - x^4 + o(x^4) + (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))(x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)) = 2x^2 - x^4 + x^2 + \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) =$
$= 3x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4) = \frac{x^2}{3}(9 - 4x^2 + o(x^2))$ oraz $3x\operatorname{arctg} x = 3x(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)) = x^2(3 - x^2 + o(x^2))$.

Mamy więc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x(x^2-\ln(\cos x))} - \frac{1}{3x\operatorname{arctg} x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x^2(9-4x^2+o(x^2))} - \frac{1}{x^2(3-x^2+o(x^2))} =$
$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{3(3-x^2+o(x^2))-(9-4x^2+o(x^2))}{x^2(9-4x^2+o(x^2))(3-x^2+o(x^2))} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2(9-4x^2+o(x^2))(3-x^2+o(x^2))} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+o(1)}{(9-4x^2+o(x^2))(3-x^2+o(x^2))} = \frac{1}{27}$.

A teraz pokażemy rozwiązanie, które powinno było znaleźć się we wszystkich pracach z wyjątkiem pracy autorki zaprezentowanego wyżej rozumowania. Tym razem zajmiemy się zadaniem z zestawu (B). Istotnych różnic między tymi zadaniami nie ma.

Mamy $1 - \cos(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{\sin^4 x}{24} + o(\sin^4 x) = \frac{1}{2}(x^2 - \frac{x^4}{3}) - \frac{x^4}{24} + o(x^4) = \frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$. Wobec tego $\cos x(2 - 2\cos(\sin x)) = 2\cos x(1 - \cos(\sin x) = (2 - x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4))(\frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{24} + o(x^4)) =$
$= x^2 - \frac{5x^4}{12} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^2 - \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$. Wiemy też, że $x\operatorname{arctg} x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$. Stąd wynika, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x(2-2\cos(\sin x))} - \frac{1}{x\operatorname{arctg} x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2-\frac{11}{12}x^4+o(x^4)} - \frac{1}{x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)} =$
$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2(1-\frac{11}{12}x^2+o(x^2))} - \frac{1}{x^2(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2))} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2))-(1-\frac{11}{12}x^2+o(x^2))}{x^2(1-\frac{11}{12}x^2+o(x^2))(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2))} =$
$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^2+o(x^2)}{x^2(1-\frac{11}{12}x^2+o(x^2))(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2))} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}+o(1)}{(1-\frac{11}{12}x^2+o(x^2))(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2))} = \frac{7}{12}$.

Stosunkowo wiele osób próbowało zastosować regułę de l'Hospitala. Z formalnego punktu widzenia ma to sens. Jednak żadna z tych osób nie doprowadziła rozumowania do końca, co przewidywałem. Rzecz w tym, że jeśli to twierdzenie stosowane jest bez upraszczania funkcji, to wyrażenia, które przychodzi różniczkować i to wiele razy, stają się na tyle długie, że szanse na pomyłki rosną szybko, a studentka lub student zobaczywszy, że nie zdąży tego skończyć, zajmuje się innym zadaniem. Takie prace oceniłem na 0 punktów, bo nie było widać szans na zakończenie rozwiązania w czasie klasówki. Niżej pokażę, że jednak tą metodą zadanie można było rozwiązać, a dokładniej: ja dałbym radę. Zajmę się zadaniem (A).

Mamy $\frac{1}{2\cos x(x^2-\ln(\cos x))}-\frac{1}{3x\operatorname{arctg} x}=\frac{3x\operatorname{arctg} x-2\cos x(x^2-\ln(\cos x))}{3x\operatorname{arctg} x(2\cos x(x^2-\ln(\cos x)))}$. Ponieważ licznik i mianownik dążą do 0, więc można stosować regułę de l'Hospitala, a w każdym razie próbować. Teoretycznie mogłoby się zdarzyć, że iloraz funkcji ma granicę, a iloraz pochodnych jej nie ma. Tu akurat tak nie jest. Przyjrzyjmy się dokładniej najpierw mianownikowi, bo on jest iloczynem kilku wyrażeń, co pozwala na zajęcie się tymi czynnikami oddzielnie. Wiemy, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$ oraz $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. Można więc od razu napisać, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\operatorname{arctg} x-2\cos x(x^2-\ln(\cos x))}{3x\operatorname{arctg} x(2\cos x(x^2-\ln(\cos x)))}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\operatorname{arctg} x-2\cos x(x^2-\ln(\cos x))}{6x^2(x^2-\ln(\cos x)))}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{arctg} x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\operatorname{arctg} x-2\cos x(x^2-\ln(\cos x))}{6x^2(x^2-\ln(\cos x)))}$. Uprościliśmy mianownik trochę, ale mamy szanse na dalsze uproszczenie, jeśli odpowiemy na pytanie: dla jakiego a granica $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\ln(\cos x)}{x^a}$ jest skończona i różna od 0? Stosujemy regułę de l'Hospitala. Mamy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\ln(\cos x)}{x^a}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+\operatorname{tg} x}{ax^{a-1}}$. Widać, że powinniśmy przyjąć, że $a-1=1$, czyli że $a=2$. Wtedy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\ln(\cos x)}{x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+\operatorname{tg} x}{2x}=1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{2x}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. Oznacza to, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\operatorname{arctg} x-2\cos x(x^2-\ln(\cos x))}{6x^2(x^2-\ln(\cos x)))}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\operatorname{arctg} x-2\cos x(x^2-\ln(\cos x))}{6x^2\cdot\frac{3}{2}x^2}\cdot\frac{\frac{3}{2}x^2}{x^2-\ln(\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\operatorname{arctg} x-2\cos x(x^2-\ln(\cos x))}{9x^4}$. Mianownik wygląda teraz lepiej. Zastosujmy regułę de l'Hospitala.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\operatorname{arctg} x-2\cos x(x^2-\ln(\cos x))}{9x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\operatorname{arctg} x+\frac{3x}{1+x^2}+2\sin x(x^2-\ln(\cos x))-2\cos x(2x+\operatorname{tg} x)}{36x^3}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x(x^2-\ln(\cos x))}{36x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\operatorname{arctg} x+\frac{3x}{1+x^2}-2\cos x(2x+\operatorname{tg} x)}{36x^3}=\frac{1}{12}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\operatorname{arctg} x+\frac{3x}{1+x^2}-2\cos x(2x+\operatorname{tg} x)}{36x^3}$.

Znów zastosuję regułę de l'Hospitala

$\frac{1}{12}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\operatorname{arctg} x+\frac{3x}{1+x^2}-2\cos x(2x+\operatorname{tg} x)}{36x^3}=\frac{1}{12}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3}{1+x^2}+\frac{3(1-x^2)}{(1+x^2)^2}+2\sin x(2x+\operatorname{tg} x)-2\cos x(2+1+\operatorname{tg}^2 x)}{108x^2}=$
$=\frac{1}{12}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{6}{(1+x^2)^2}-2\cos x(2+1+\operatorname{tg}^2 x)}{108x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x(2x+\operatorname{tg} x)}{108x^2}=$
$=\frac{1}{12}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-24x}{(1+x^2)^3}+2\sin x(3+\operatorname{tg}^2 x)-4\cos x\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x)}{216x}+\frac{2(2+1)}{108}=\frac{1}{12}-\frac{24}{216}+\frac{6}{216}-\frac{4}{216}+\frac{1}{18}=\frac{1}{27}$.

No to sukcesik, ale gdyby nie dosyć systematyczne upraszczanie, mielibyśmy trudności związane z nudnymi i długawymi obliczeniami.

W podobny sposób można obliczyć granicę w zadaniu (B). Podkreślam raz jeszcze, że nie ma tu żadnych merytorycznych trudności, ale wybór metody jest ważny zwłaszcza, gdy zadanie trzeba rozwiązać w ograniczonym czasie.

I jeszcze jedno: te uproszczenia, to w końcu dowodzenie wzoru Taylora z resztą Peano w szczególnych przypadkach. To jeszcze jeden argument przeciw regule de l'Hospitala w tym wypadku.

Decyzja o użyciu reguły de l'Hospitala dawała 0 p.
Użycie właściwych wielomianów Taylora, ale za mało dokładnych (np. drugiego stopnia zamiast czwartego) dawała 2 p.
4 p. można było dostać za użycie właściwych wielomianów Taylora, ale popełniając jakieś błędy w zasadzie uniemożliwiające zakończenie rozwiązania w ograniczonym czasie.
6 p. Poprawna metoda, ale z błędami rachunkowymi
8 p. lub 9 p. poprawnie jakieś błędy w końcówce.