O kolokwium kwietniowym.

1. Znaleźć ekstrema lokalne i globalne funkcji $f\colon [0,\pi-\arcsin\frac{1}{\pi}] \longrightarrow \mathbb{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x)=x\sin^2 x+\sin x\cos x$.

2. Znaleźć ekstrema lokalne i globalne funkcji $g\colon [-\frac{\pi}{2},\arccos\frac{1}{\pi}] \longrightarrow \mathbb{R}$ określonej za pomocą wzoru $g(x)=(x+\frac{\pi}{2})\cos^2 x-\sin x\cos x$.

Cenna obserwacja z ćwiczeń:
$f(x+\frac{\pi}{2})=(x+\frac{\pi}{2})\sin^2(x+\frac{\pi}{2})+\sin(x+\frac{\pi}{2})\cos(x+\frac{\pi}{2})=(x+\frac{\pi}{2})\cos^2 x-\sin x\cos x=g(x)$ oraz $\cos(\pi-\arcsin\frac{1}{\pi}-\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{\pi})=\sin(\arcsin\frac{1}{\pi})=\frac{1}{\pi}$, zatem $\arccos\frac{1}{\pi}=\pi-\arcsin\frac{1}{\pi}-\frac{\pi}{2}$. W ten sposób zauważyliśmy, że oba zadania w istocie rzeczy pokrywają się.

Mamy
$f'(x)=\sin^2 x+2x\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=\cos x(2x\sin x+\cos x)=\sin x\cos x(2x+\operatorname{ctg} x)$ dla $x\in(0,\pi-\arcsin\frac{1}{\pi})\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$. Dla $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ zachodzi nierówność $f'(x)>0$, zatem na przedziale domkniętym $[0,\frac{\pi}{2}]$ funkcja f rośnie (ściśle). Na przedziale $(\frac{\pi}{2},\pi)$ czynnik $\sin x\cos x$ jest ujemny. Należy więc zbadać znak czynnika $2x+\operatorname{ctg} x=:h(x)$. Mamy $h'(x)=2-\frac{1}{\sin^2 x}$. Na przedziale $[\frac{\pi}{2},\pi]$ funkcja sinus maleje (ściśle), więc $h'(x)>0$, gdy $\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ oraz $h'(x)<0$, gdy $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}<x<\pi$. Mamy też $\sin(\arcsin\frac{1}{\pi})=\frac{1}{\pi}<\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, więc $\arcsin\frac{1}{\pi}<\frac{\pi}{6}$, zatem $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}<\pi-\arcsin\frac{1}{\pi}$. Wobec tego, że $h(\pi-\arcsin\frac{1}{\pi})=2\pi-2\arcsin\frac{1}{\pi}-\operatorname{ctg}(\arcsin\frac{1}{\pi})=2\pi-2\arcsin\frac{1}{\pi}-\pi\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}>2\pi-\frac{\pi}{3}-\pi=$ $=\frac{2\pi}{3}>0$. Stąd wnioskujemy, że $h(x)>0$, gdy $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}<x<\pi-\arcsin\frac{1}{\pi}$, więc funkcja f maleje na przedziale $[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\pi-\arcsin\frac{1}{\pi}]$. Z tego co do tej pory powiedzieliśmy wynika, że największą wartością funkcji f jest $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$. Najmniejszą jest mniejsza z liczb $f(0)=0$ i $f(\pi-\arcsin\frac{1}{\pi})=$ $=(\pi-\arcsin\frac{1}{\pi})\cdot\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{\pi}\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}=\frac{1}{\pi}(1-\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}-\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{\pi})\approx\frac{1}{\pi}(1-(1-\frac{1}{2\pi^2})-\frac{1}{\pi^2})=$ $-\frac{1}{2\pi^2}<0$. Pozostaje drobna kwestia. Czy użyte przybliżenia są dostatecznie dokładne, by wolno było twierdzić, że wartość f w prawym końcu przedziału jest rzeczywiście ujemne, a co za tym idzie, że jest to najmniejsza z wartości funkcji f przyjmowanych na przedziale $[0,\pi-\arcsin\frac{1}{\pi}]$. Wymaga to jakiegoś uzasadnienia. Mamy $\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{\pi})>\frac{1}{\pi^2}$. Jeśli $0<x<1$, to $\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-x)^n$. Ponieważ $\left|\binom{1/2}{n}=\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot(\frac{1}{2}-2)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{2}-(n-1))}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}\right|\leqslant\frac{1}{8}$, więc $\left|\sum_{n=2}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-x)^n\right|\leqslant\frac{x^2}{8(1-x)}$. Wobec tego $\sqrt{1-x}\geqslant 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8(1-x)}$. Stąd wynika, że jeśli $0<x<\frac{1}{2}$, np. $x=\frac{1}{\pi}$, to

$$\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x\geqslant 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8(1-x^2)}+x^2\geqslant 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8(1-\frac{1}{4})}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{6}>1.$$

Udowodniliśmy, że $f(\pi-\arcsin\frac{1}{\pi})<0$. Ta liczba ma niewielką wartość bezwzględną, więc trzeba było szacować w miarę dokładnie. Można też było oszacować błąd używając wzory Taylora z resztą Lagrange'a. Zachęcam do zrobienia tego.

262. Wiadomo, że $\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ dla $x\in[-1,1]$. Wynika stąd w szczególności, że $\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg} 1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$. Udowodnić, że zachodzą nierówności $\frac{1}{4(n+1)} < \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} + \ldots = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} < \frac{1}{4n}$. Ile wyrazów szeregu Leibniza musiałby wziąć pod uwagę autor podręcznika zachęcający czytelników do użycia tego wzoru do obliczenia pierwszych trzech cyfr po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby π?

263. Ile wyrazów szeregu należy rozpatrzeć, by znaleźć pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby π, jeśli użyjemy wzoru
$\frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)\sqrt{3}^{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$?

264. Dowieść, że $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$, zatem $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+1}} \right)$. Ile wyrazów tego szeregu trzeba użyć, aby znaleźć trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby π?

265. Wiemy już, że $\arcsin x = x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^5 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^7 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} x^{2n+1}$ oraz że $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, czyli $\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$. Ilu tym razem należy należy użyć szeregu, aby znaleźć pierwsze trzy cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby π?

266. Wiadomo, że $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Obliczyć granice:
$\lim_{n\to\infty} n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$, $\lim_{n\to\infty} n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$ oraz $\lim_{n\to\infty} n^2 \left(2e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$.