O zadaniu 213 jeszcze troszkę, ale niedużo. Otrzymaliśmy wzór na drugą pochodną funkcji

$$f''(x) = \frac{2}{9}(7x^2-3)^{-5/3}(9x^2-4)^{-7/3}(567x^4-163x^3-36).$$

Nie rozwiązywaliśmy już równania $567x^4 - 163x^3 - 36 = 0$, ale zlokalizowaliśmy bez rozwiązywania jego rzeczywiste pierwiastki z dobrą dokładnością. Sprawdziłem obliczenia. Były bezbłędne. Gratuluję czujności (na pewno próbowałem popełniać błędy). Gdyby Państwo wspominali czasy szkolne (w zasadzie są Państwo za młodzi na to), to napisaliby Państwo zapewne coś w rodzaju $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{163+\sqrt{163^2+4\cdot 567\cdot 36}}{2\cdot 567}}$, co zapewne ucieszyłoby wielu nauczycieli. Używając sprzętu elektronicznego moglibyśmy napisać, że

$x_{1,2} \approx \pm 0{,}658\,657\,929\,363\,500\,377\,250\,799\,983\,662\,359\,009\,009\,976\,391\,379\,312\,317\,744\,225\,757\,5$,

co w połączeniu z równościami

$\frac{2}{3} \approx 0{,}666\,666\,666\,666\,666\,666\,666\,666\,666\,666\,666\,666\,666\,666\,666\,666\,666\,666\,666\,666\,666\,6$ oraz

$\sqrt{\frac{3}{7}} \approx 0{,}654\,653\,670\,707\,977\,143\,798\,292\,456\,246\,858\,355\,569\,208\,082\,395\,424\,557\,515\,320\,303\,4$ mogłoby spowodować radość tak wielką, że grożącą nieprzyjemnymi konsekwencjami zdrowotnymi (to w związku z opowieściami o przybliżeniach π, którymi entuzjazmują się dziennikarze i nieliczni czytelnicy ich tekstów). Nam wystarczyłoby znacznie mniej dokładne przybliżenie trzema cyframi po przecinku. W rzeczywistości wcale nie było nam to potrzebne do naszkicowania wykresu funkcji, bo byliśmy w stanie ustalić kolejność tych liczb na osi bez użycia sprzętu elektronicznego.

W istocie rzeczy granice funkcji i jej pochodnej w punktach $\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$ oraz $\pm\frac{2}{3}$ wymuszały pojawianie się punktów przegięcia w dosyć dobrze określonych miejscach. Podobnie bywa z lokalnymi ekstremami. Zresztą warto jeszcze zapytać o obraz tej funkcji. Czy to cała prosta? A jeśli nie, to jakie liczby nie są wartościami tej funkcji. Podobna funkcja jest przebadana w pliku

`https://www.mimuw.edu.pl/~krych/matematyka/AM1skrypt/am1_0708_cz_08_rozniczk.pdf`,

przykład 8.66

214. Dowieść, że jeśli $a < b < c$, funkcja $f\colon [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła i punkty $\big(a, f(a)\big)$, $\big(b, f(b)\big)$ i $\big(c, f(c)\big)$ leżą na jednej prostej, to punkt $\big(x, f(x)\big)$ też leży na tej prostej dla każdego $x \in (a,c)$.

215. Znaleźć taki punkt c, że $f'(c) = 0$ i $0 < c < 1$, jeśli $f(x) = x^k(1-x)^n$, $k, n \in \mathbb{N}$.

216. Niech funkcja $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\ln x) & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Niech $c(x)$ oznacza taką liczbę, że $f(x) - f(0) = xf'\big(c(x)\big)$ i $c(x) \in (0,x)$. Wykazać, że funkcja c ma punkty nieciągłości w każdym przedziale postaci $(0,d)$, $d > 0$.

217. Funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ma ciągłą pochodną w każdym punkcie przedziału (a,b). Czy wynika stąd, że dla każdej liczby $c \in (a,b)$ istnieją takie liczby $x, y \in [a,b]$, że $x < c < y$ i $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{(y-x)}$?

218. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale P i ma pochodną w każdym punkcie wewnętrznym przedziału P, to najmniejszą stałą Lipschitza funkcji f jest $\sup\{|f'(x)|\colon \quad x \in \mathrm{int}(P)\}$. W szczególności jeśli ten kres górny jest nieskończony, to funkcja warunku Lipschitza nie spełnia.
int(A) oznacza wnętrze zbioru A, więc zbiór wszystkich takich punktów zbioru A, które są środkami pewnych przedziałów zawartych w zbiorze A.

219. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, to istnieje taki ciąg (x_n), którego granicą jest ∞, że $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$.

220. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (-1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $(1+x)f'(x) = \sqrt{7}f(x)$, to $f(x) = f(0)(1+x)^{\sqrt{7}}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

221. Dowieść, że jeżeli $x < 1$, to zachodzi równość $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} = = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}$, a dla $x > 1$ — $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} = \operatorname{arctg} x - \frac{3\pi}{4}$.

222. Dowieść, że jeżeli $|x| \geqslant 1$, to $2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi \cdot \frac{|x|}{x}$.

223. Znaleźć maksimum długości statku, który może wpłynąć z kanału o szerokości $a > 0$ do prostopadłego doń kanału, którego szerokość jest równa $b > 0$. Należy zaniedbać szerokość statku. Kanały są bardzo długie w porównaniu z uch szerokościami.

224. Ile pierwiastków ma równanie $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$?

225. Kobieta zbierająca jagody w lesie znajduje się w odległości 5 km od bardzo długiej prostoliniowej drogi i o 13 km od domu, który stoi przy drodze. Idąc lasem kobieta może przejść 3 km w ciągu godziny, a szosą — 5 km. Chce jak najszybciej dojść do domu, gdzie czeka na nią posiłek przygotowany przez kochającego męża. Jak powinna zaplanować marszrutę?

226. Ile pierwiastków ma równanie $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$?

227. Ile pierwiastków ma równanie $e^x = ax^2$ w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$?

228. Dowieść, że wielomian dodatniego stopnia jest funkcją ściśle monotoniczną na każdej z półprostych (a,∞) i $(-\infty,-a)$, jeśli tylko a jest dostatecznie duża liczbą dodatnią.

229. Dowieść, że dla każdej liczby dodatniej x zachodzi nierówność: $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

230. Dowieść, że jeśli $x > 0$, to $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

232. Załóżmy, że w jest wielomianem zmiennej x. Udowodnić, że jeśli k jest liczbą naturalną i $c \in \mathbb{R}$, to wielomian w jest podzielny przez $(x-c)^k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 = w(c) = w'(c) = w''(c) = \ldots = w^{(k-1)}(c)$.
to zadanie nie jest trudne, ale jest ważne i to BARDZO.