Zadanie, które nie wyszło

Udowodnimy, że jeśli funkcje f, g są niemalejące na przedziale $[0,1]$, to zachodzi nierówność $\int_0^1 f(x)g(x)dx \geqslant \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx$

Rozwiązanie pierwsze.

Niech $a_k = f(\frac{k}{n})$, $b_k = g(\frac{k}{n})$. Mamy $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ i $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Wiadomo też, że $\int_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)$, $\int_0^1 g(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)$ oraz $\int_0^1 f(x)g(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n)$. Dla dowodu twierdzenia wystarczy dowieść, że $n(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n) \geqslant (a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)$. Dla $n=1$ zachodzi równość. Dla $n=2$ mamy $2(a_1b_1+a_2b_2)-(a_1+a_2)(b_1+b_2) = a_1b_1+a_2b_2-a_1b_2-a_2b_1 = a_1(b_1-b_2)+a_2(b_2-b_1) = (a_1-a_2)(b_1-b_2) \geqslant 0$. Zabawmy się jeszcze raz. Niech $n=3$. Mamy

$$3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)-(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3) =$$
$$= 2a_1b_1 - a_1(b_2+b_3) + 2a_2b_2 - a_2(b_1+b_3) + 2a_3b_3 - a_3(b_1+b_2) =$$
$$= a_1(b_1-b_2)+a_1(b_1-b_3)+a_2(b_2-b_1)+a_2(b_2-b_3)+a_3(b_3-b_1)+a_3(b_3-b_2) =$$
$$= (a_1-a_2)(b_1-b_2)+(a_1-a_3)(b_1-b_3)+(a_2-a_3)(b_2-b_3) \geqslant 0.$$

To w końcu ogólnie. Mamy

$$n(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n)-(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n) =$$
$$= (n-1)a_1b_1 - a_1(b_2+b_3+\ldots+b_n) + (n-1)a_2b_2 - a_2(b_1+b_3+\ldots+b_n) +$$
$$+ \ldots + (n-1)a_nb_n - a_n(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}) =$$
$$= a_1(b_1-b_2)+a_1(b_1-b_3)+\ldots+a_1(b_1-b_n)+a_2(b_2-b_1)+a_2(b_2-b_3)+\ldots+a_2(b_2-b_n) +$$
$$+ \ldots + a_n(b_n-b_1)+a_n(b_n-b_2)+\ldots+a_n(b_n-b_{n-1}) =$$
$$= (a_1-a_2)(b_1-b_2)+(a_1-a_3)(b_1-b_3)+(a_1-a_n)(b_1-b_n) +$$
$$+ (a_2-a_3)(b_2-b_3)+(a_2-a_4)(b_2-b_4)+(a_2-a_n)(b_2-b_n) +$$
$$+ (a_3-a_4)(b_3-b_4)+(a_3-a_5)(b_3-b_5)+(a_3-a_n)(b_3-b_n)+\ldots+(a_{n-1}-a_n)(b_{n-1}-b_n) \geqslant 0.$$

Otrzymaliśmy sumę $\binom{n}{2}$ nieujemnych składników i to kończy ten dowód. Warto dodać, że zapis można skrócić zapisując rozumowanie jako dowód indukcyjny. Chciałem jednak uwidocznić istotę rozumowania nie kryjąc jej w oznaczeniach.

Rozwiązanie drugie.

Tym razem sumy Riemanna nie pojawią się. Mamy oszacować całkę $\int_0^1 f(x)g(x)dx$ z dołu przez iloczyn całek $\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx$. Zapiszemy go nieco inaczej: $\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(y)dy$, co oczywiście nie zmienia wartości całki. Możemy więc napisać, że

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (\int_0^1 f(x)g(x)dx)dy - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(y)dy =$$
$$= \int_0^1 (\int_0^1 f(x)(g(x)-g(y))dx)dy$$

oraz (wynik nie zależy od nazwy zmiennej)

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (\int_0^1 f(y)g(y)dy)dx - \int_0^1 f(y)dy \int_0^1 g(x)dx =$$
$$= \int_0^1 (\int_0^1 f(y)(g(y)-g(x))dy)dx = \int_0^1 (\int_0^1 f(y)(g(y)-g(x))dx)dy$$

– zmiana kolejności całkowania nie wpływa na wynik, co nietrudno wykazać. Dodając dwie ostatnie równości stronami otrzymujemy

$$2\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx\right) = \int_0^1 (\int_0^1 (f(y)-f(x))(g(y)-g(x))dx)dy \geqslant 0,$$

co wynika z tego, że liczby $f(y)-f(x)$ i $g(y)-g(x)$ mają ten sam znak.