Przypominam definicją ciągłości i ciagłości jednostajnej.
Funkcja $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $p \in P$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in P}|x-p|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(p)|<\varepsilon,$$

więc jest ciągła w zbiorze P wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(c) \qquad \forall_{p\in P}\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in P}|x-p|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(p)|<\varepsilon.$$

Funkcja $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła w zbiorze P wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(jc) \qquad \forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{p\in P}\forall_{x\in P}|x-p|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(p)|<\varepsilon.$$

Różnica formalna między obydwiema definicjami polega różnicy kolejności występowania kwantyfikatorów. Gdy mówimy o ciągłości w zbiorze P, to liczba $\delta>0$ dobierana do liczby ε może zależeć również od punktu p, w którym ciągłość jest badana, a gdy mowa jest o ciągłości jednostajnej, to zależy tylko od liczby ε.

Przykład 8.1 Niech $f(x)=x^3$ dla $x\in[0,\infty)$ i niech $p\in[0,\infty)$. Udowodnię, że f jest ciągła w p. Załóżmy, że $|x-p|<\delta<1$. Wtedy

$$|x^3-p^3| = |x-p||x^2+xp+p^2| \leqslant |x-p|((|p|+1)^2+(|p|+1)|p|+|p|^2) < |x-p|\cdot 3(|p|+1)^2,$$

więc przyjmując, że $\delta < \frac{\epsilon}{3(|p|^2+1)}$ otrzymujemy $|x^3-p^3| \leqslant 3(|p|^2+1)|x-p| < 3(|p|^2+1)\delta < \varepsilon$, co kończy dowód ciągłości w dowolnie wybranym punkcie p. Funkcja f nie jesty jednostajnie ciągła na $[0\infty)$. Załóżmy, że jest jednostajnie ciągła i niech $\delta\in(0,1)$ oznacza liczbę dobraną di=o liczby $\varepsilon=\frac{3}{2}$. Wtedy dla $x=\frac{1}{\delta}+\frac{\pi}{2}$ i liczby $p=\frac{1}{\delta}$ otrzymujemy $\frac{3}{2}=\varepsilon>(\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2})^3-(\frac{\delta}{2})^3=\frac{3}{2\delta}+\frac{3\delta}{4}+\frac{\delta^3}{8}>\frac{3}{2}$, co oczywiście jest nieprawdą.
W rozumowaniu nie korzystaliśmy z tego, że $p>0$, mogliśmy zapomnieć o większości wartości bezwzględnych.
Jednocześnie prawie udowodniliśmy wprost jednostajną ciągłość funkcji f na dowolnym przedziale ograniczonym, niekoniecznie domkniętym. Jeśli końcami przedziału są liczby $a,b\in\mathbb{R}$, możemy przyjąć, że $\delta<\frac{\varepsilon}{3(1+\max(|a|^2,|b|^2))}$. Wtedy

$$|x^3-p^3| \leqslant |x-p|(|x|^2+|x|\cdot|p|+|p|^2 \leqslant |x-p|\cdot 3(1+\max(|a|^2,|b|^2)^2),$$

bo $|x|,|p|\leqslant\max(|a|,|b|)$, a stąd jednostajna ciągłość wynika natychmiast. $\square$

Przykład 8.2 Funkcja e^x nie jest jednostajnie ciągła na półprostej $(7,\infty)$. Załóżmy, że jest jednostajnie ciągła oraz że udało nam się dobrać liczbę $\delta>0$ do liczby $\varepsilon=1$. Mamy więc $1>e^{x+\delta/2}-e^x=e^x(e^{\delta/2}-1)$. To jednak nie jest możliwe, bo $e^{\delta/2}-1>0$, zatem $\lim\limits_{x\to\infty}e^x(e^{\delta/2}-1)=\infty$.
Funkcja e^x jest jednostajnie ciągła na półprostej $(-\infty,7)$. Załóżmy, że $x<y<7$ Wtedy
$0<e^y-e^x=e^y\left(1-\frac{1}{e^{y-x}}\right)\leqslant e^y\left(1-\frac{1}{1+y-x}\right)=e^7\frac{y-x}{1+y-x}<e^7(y-x)$, więc wystarczy, aby $\delta<\varepsilon\cdot e^{-7}$.
Zakończyliśmy dowód. Oczywiście w żadnym z tych dwóch dowodów liczbą 7 nie była istotna. Można zastąpić ją dowolną liczbą $c\in\mathbb{R}$. $\square$

100. Udowodnić, że funkcja $\sqrt{x}$ jest jednostajnie ciągła na półprostej $[0, \infty)$.

101. Udowodnić, że funkcja ln nie jest jednostajnie ciągła na przedziale $(0, 1)$ i jest jednostajnie ciągła na półprostej $[1, \infty)$.

102. Udowodnić, że funkcja tg nie jest jednostajnie ciągła na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ natomiast jest jednostajnie ciągła $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

103. Udowodnić, że jedna z funkcji $\sin(\sqrt{x})$, $\sin(x^2)$ jest jednostajnie ciągła na półprostej $[0, \infty)$, a druga nie.

104. Rozstrzygnąć, czy istnieje jednostajnie ciągła funkcja przekształcająca półprostą $[0, \infty)$ na prostą $(-\infty, \infty)$.