76. Udowodnić następujące twierdzenie o dużej zmianie kolejności sumowania

Załóżmy, że zachodzi jedno z dwóch założeń:

(i) dla każdej liczby całkowitej $m \geq 0$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}|$ jest zbieżny i
$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}|\Big) < +\infty,$$
(ii) $\sum_{j=0}^{\infty} |a_{\tilde{\sigma}(j)}| < \infty$ dla pewnej bijekcji $\tilde{\sigma} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Wtedy dla każdej bijekcji $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ zachodzi równość
$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}\Big) = \sum_{j=0}^{\infty}a_{\sigma(j)}.$$
Po udowodnieniu tego twierdzenia będzie wolno zmieniać kolejność sumowania tak, ja to szanowni Państwo robili w zadaniu 2d.

77. Niech $\binom{a}{0} = 1$ dla każdego $a \in \mathbb{C}$ oraz $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$ dla każdego $a \in \mathbb{C}$ i dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$. Obliczyć $\binom{1}{n}$ oraz $\binom{\frac{1}{2}}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że dla każdego $a \in \mathbb{C}$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $\binom{a}{n-1} + \binom{a}{n} = \binom{a+1}{n}$, $\binom{a}{n} = \frac{a}{n}\binom{a-1}{n-1}$.

78. Udowodnić, że dla każdych $a, b \in \mathbb{C}$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość
$$\binom{a}{0}\binom{b}{n} + \binom{a}{1}\binom{b}{n-1} + \binom{a}{2}\binom{b}{n-2} + \ldots + \binom{a}{n}\binom{b}{0} = \binom{a+b}{n}.$$
Ile pierwiastków ma wielomian n–tego stopnia?

79. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ szereg (dwumianowy Newtona) $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ jest zbieżny, a dla jakich jest zbieżny bezwzględnie (wynik zależy od a)?

80. Udowodnić, że jeśli $x \in (-1, 1)$ i $a \in \mathbb{R}$, to $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n > 0$.

81. Udowodnić, że jeśli $x \in (-1, 1)$ i $a \in \mathbb{R}$, to
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}(x+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}n\binom{a}{n}x^{n-1} = a\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a-1}{n}x^{n-1}.$$

82. Udowodnić, że jeśli $|x| < 1$, to (k dalej jest liczbą naturalną)
$$\lim_{k\to\infty}k\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/k}{n}x^n - 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-x)^{n-1}.$$
Uwaga: są tu dwa przejścia graniczne, więc trzeba bardzo uważać, aby nie rozumować tak: $0 = \lim_{k\to\infty} 0 = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\frac{k}{n+k} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$, *bo jak widać można otrzymać sensacyjne wyniki. Zmiana kolejności przechodzenia do granicy wymaga uzasadnienia i czasem bywa ono trudne, a czasem jest wręcz niemożliwe, jak pokazuje powyższa równość.*

Przypomnijmy, że $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ dla każdej liczby zespolonej z przy czym szereg użyty w tej definicji jest zbieżny bezwzględnie. Prof. Kałamajska udowodniła, że $e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ dla każdej liczby zespolonej z. Również, że $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$ and that $\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$ oraz że te dwie własności definiuje funkcję wykładniczą o podstawie e.

83. Udowodnić, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}$, to $|e^{x+yi}| = e^x$.

84. Udowodnić, że jeśli $y \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon \in (0, \infty)$, to $|e^{iy} - 1| \leqslant (1+\varepsilon)|y|$. Wywnioskować stąd, że $|e^{iy} - 1| \leqslant |y|$.

85. Udowodnić, że jeśli $y \in (0, \infty)$, to
$y = \sup\{|e^{y_1 i} - 1| + |e^{y_2 i} - e^{y_1 i}| + \ldots + |e^{y_n i} - e^{y_{n-1} i}| + |e^{yi} - e^{y_n i}| : \quad 0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < y\}$.
$|e^{y_j i} - e^{y_{j-1} i}|$ to odległość liczby $e^{y_j i}$ od liczby $e^{y_{j-1} i}$. Liczby (zespolone) $e^{y_1 i}$, $e^{y_2 i}, \ldots, e^{y_n i}$ leżą na łuku okręgu jednostkowego zaczynającym się w punkcie $e^{0\cdot i} = 1$ i kończącym się w punkcie e^{yi}. Twierdzimy więc, że y to kres górny długości łamanych wpisanych w ten łuk. Można powiedzieć też, że to długość drogi przebytej przez punkt poruszający się po okręgu jednostkowym w ten sposób, że w chwili t punkt znajduje się w miejscu e^{ti}. Co pełni rolę prędkości chwilowej w momencie t w tym ruchu?

86. Udowodnić, że jeśli $|a| < 1$ i $|x| < 1$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje taka liczba $b_n(x)$, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) a^n$$

oraz że $b_1(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$.
Dowieść, że dla każdego $x \in (-1, 1)$ zachodzi równość $\ln(1+x) = b_1(x)$, zatem dla każdego x o module mniejszym od 1 zachodzi równość $e^{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots} = 1 + x$.
Uwaga. Ostatni wzór zachodzi nie tylko dla rzeczywistych x ale też dla zespolonych — w rozumowaniu nie ma potrzeby korzystywania z tego, że x jest liczbą rzeczywistą, istotna jest jedynie nierówność $|x| < 1$.

87. Podać przykład takiej funkcji $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, że $f(1) = e$, $f(z+w) = f(z)f(w)$ dla dowolnych $w, z \in \mathbb{C}$, jeśli $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, to $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z)$ i $f(i) \neq e^i$.

88. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb zespolonych. Niech $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$, dla którego szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny. Dowieść, że jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ jest zbieżny i $|z_2| < |z_1|$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_2^n$ jest zbieżny bezwzględnie.

Dowieść, że istnieje też taki ciąg (b_n), zależny od z_2, że $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_2)^n$ dla z spełniających nierówność $|z_2| + |z - z_2| < |z_1|$. (zmiana kolejności sumowania powinna szybko pomóc).

89. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb zespolonych. Niech $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$, dla którego szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny. Dowieść, że jeśli $|f(z_0)| \leqslant |f(z)|$ dla każdego z z dziedziny funkcji f oraz $|z_0| < |z_1|$ dla pewnego z_1 z dziedziny funkcji f, to $f(z_0) = 0$.
Można zacząć od $z_0 = 0$. Można też zająć się najpierw wielomianami, bhy uniknąć kwestii związanych ze zbieżnością szeregów.

90. Dowieść, że istnieje taka liczba zespolona z, że $z = e^z$.

91. Dowieść, że dla każdej liczby zespolonej w istnieje taka lkiczba zespolona z, że $w = \sin z$.