Wspomnienia o funkcji wykładniczej.

1. Niech $x \in \mathbb{R}$ i niech $a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Jeśli $n > -x$ to $a_n(x) \leqslant a_{n+1}(x)$. Wynika to łatwo z nierówności Bernoulliego. Zauważmy najpierw, że założyliśmy, że $1 + \frac{x}{n} = \frac{n+x}{n} > 0$ i również $1 + \frac{x}{n+1} = \frac{n+1+x}{n+1} > 0$. Stąd wynika, że
$\frac{(1+\frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{x}{n})^n} = \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}(1+\frac{x}{n}) = \left(1 + \frac{-\frac{x}{n}+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}(1+\frac{x}{n}) \geqslant \left(1 + (n+1)\frac{-\frac{x}{n}+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)(1+\frac{x}{n}) =$
$= 1 + \frac{x}{n} + (n+1)(-\frac{x}{n} + \frac{x}{n+1}) = 1 + \frac{x}{n} - x - \frac{x}{n} + x = 1$. Korzystać z nierówności Bernoulliego można, bo gdy $-1 < \frac{x}{n} \leqslant 0$, to $\frac{-\frac{x}{n}+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}} \geqslant 0$, a gdy $x > 0$, to $\frac{\frac{x}{n}-\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}} < 1$. $\square$
Jeśli $0 \leqslant -x < n$, to $0 < 1 + \frac{x}{n} \leqslant 1$, więc w wypadku $x < 0$ ciąg $(a_n(x))$ jest od pewnego momentu niemalejący i ograniczony z góry przez 1, więc jego granica istnieje i jest liczbą z przedziału otwarto–domkniętego $(0, 1]$.
Lemat o ciągach szybko zbieżnych do 1. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \alpha_n)^n = 1$.
Istnieje taka liczba n_0, że jeśli $n > n_0$, to $|\alpha_n| \leqslant |n\alpha_n| < \frac{1}{2}$. Wtedy
$1 \xleftarrow[\infty\leftarrow n]{} 1 + n\alpha_n \leqslant (1 + \alpha_n)^n = \dfrac{1}{(\frac{1}{1+\alpha_n})^n} = \dfrac{1}{(1 + \frac{-\alpha_n}{1+\alpha_n})^n} \leqslant \dfrac{1}{1 + \frac{-n\alpha_n}{1+\alpha_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Z założeń o liczbie n wynika, że $\left|\frac{-\alpha_n}{1+\alpha_n}\right| \leqslant \left|\frac{-n\alpha_n}{1+\alpha_n}\right| < 1$, więc nierówność Bernoulliego można stosować itd. $\square$
Z tego, co do tej pory wykazaliśmy wynika, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)$ i że ta granica jest dodatnie. Niech $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)$. Z lematu o ciągach szybko zbieżnych do 1 wynika, że

$$1 = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(-x)\exp(x).$$

Jeśli $x > 0$, to $0 < \exp(-x) \leqslant 1$, więc $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \in [1, \infty)$. Wobec tego dla każdego $x \in \mathbb{R}$ $\exp(x) \in (0, \infty)$.
Wykażę, że $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$, czyli że $\frac{\exp(x)\exp(y)}{\exp(x+y)} = 1$. Wynika to od razu z lematu o ciągach szybko zbieżnych do 1 i równości $\frac{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}{1+\frac{x+y}{n}} = 1 + \frac{\frac{xy}{n^2}}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}$: $n\frac{\frac{xy}{n^2}}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. $\square$
Dla każdego x dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $|\frac{x}{n}| < 1$, więc (znów nierówność Bernoulliego) $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1+n\cdot\frac{x}{n} = 1+x$, a stąd wynika, że $\exp(1+x) \geqslant 1+x$. możemy napisać $\exp(-t) \geqslant 1-t$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Jeśli $x < 1$, to $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leqslant \frac{1}{1-x}$. Stąd wynika, że jeśli $y < x$, to $\exp(x)-\exp(y) = \exp(x)(1-\exp(y-x)) \leqslant \exp(x)(1-(1+(y-x))) = (x-y)\exp(x)$. Mamy też $x > y \Rightarrow \exp(x) = \exp(x-y)\exp(y) \geqslant (1+x-y)\exp(y) > \exp(y)$. Z dwóch ostatnich zdań wynika, że jeśli $y < x \leqslant c$, to $0 \leqslant \exp(x) - \exp(y) \leqslant (x-y)\exp(c)$. Intuicyjnie małym zmianom liczby x odpowiadają małe zmiany liczby $\exp(x)$. Mamy $\exp(1) = e$ – z definicji e. Z równości $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ wynika od razu, że $\exp(n) = e^n$ dla każdej liczby całkowitej n. Stąd wynika $(\exp(\frac{1}{n}))^n = \exp(n\cdot\frac{1}{n}) = \exp(1)$, zatem $\exp(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{e} = e^{1/n}$. Następny łatwy wniosek to $\exp(\frac{m}{n}) = e^{m/n}$. Korzystając z nierówności i równości wykazanych wyżej stwierdzamy, że $\exp(x) = e^x$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$. Łatwo można dowieść, że dla każdej liczby $z > 0$ istnieje dokładnie jedna taka liczba x, że $z = \exp(x)$. Piszemy wtedy $x = \ln(z)$ i mówimy, że x jest logarytmem naturalnym liczby z.

Z nierówności $e^x \geqslant 1+x$ wynika, że dla każdej liczby $x > -1$ zachodzi nierówność $\ln(1+x) \leqslant x$. Dalej mamy $\ln(1+x) = -\ln\frac{1}{1+x} = -\ln(1+\frac{-x}{1+x}) \geqslant -\frac{-x}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.
Załóżmy teraz, że $x > 0$. Wtedy ciąg $(1+\frac{x}{n})^n$ jest niemalejący, zatem (dwumian Newtona) $e^x \geqslant (1+\frac{x}{n})^n = 1 + x + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{x^3}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n!}\frac{x^n}{n^n} =$
$= 1 + x + (1-\frac{1}{n})\frac{x^2}{2!} + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\frac{x^3}{3!} + \ldots + +(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{n-1}{n})\frac{x^n}{n!}$. Jeśli $n \geqslant k$, to z poprzedniej nierówności wynika, że
$e^x \geqslant (1+\frac{x}{n})^n = 1 + x + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{x^3}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n!}\frac{x^n}{n^n} =$
$= 1 + x + (1-\frac{1}{n})\frac{x^2}{2!} + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\frac{x^3}{3!} + \ldots + +(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{n-1}{n})\frac{x^n}{n!} \geqslant$
$\geqslant 1 + x + (1-\frac{1}{n})\frac{x^2}{2!} + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\frac{x^3}{3!} + \ldots + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{k-1}{n})\frac{x^k}{k!}$.
Ustalając k i przechodząc do granicy przy $n \longrightarrow \infty$ otrzymujemy nierówność

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}.$$

Z powyższych nierówności otrzymuje też $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} \geqslant (1+\frac{x}{k})^k$. Stąd i z tego, że $\lim\limits_{k\to\infty}(1+\frac{x}{k})^k = e^x$ wynika równość $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Wzór ten zachodzi również dla $x < 0$, ale uzasadnienie musi być nieco inne, bo niektóre nierówności użyte „po drodze” zmieniają kierunek, a inne z kolei zachowują się, w szczególności dla $x < 0$ zachodzi nierówność $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
Zagadka dla młodzieży: jak to udowodnić??? Może pomnożyć jakieś szeregi? A może zobaczyć, że **od pewnego momentu** wartości bezwzględne liczb $\binom{n}{j}\left(\frac{x}{n}\right)^j$, gdy j rośnie?
Ciężki los zmusił nas do obliczenia granicy

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(1+\frac{1}{n})^{n+p}}{e} - 1\right).$$

i udało nam się. A było to tak.
Niech $r_n = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})$. Udowodnimy, że $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 r_n = \frac{1}{2}$. Niech $y_n = \ln(1+\frac{1}{n})$. Z udowodnionych wcześniej nierówności wynika, że $\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \leqslant y_n = \ln(1+\frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{n}$, a stąd

$$1 = \lim_{n\to\infty} n y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}. \tag{1}$$

Mamy $1 + \frac{1}{n} = e^{y_n} = 1 + y_n + \frac{y_n^2}{2!} + \frac{y_n^3}{3!} + \ldots$, zatem $r_n = \frac{1}{n} - y_n = \frac{y_n^2}{2!} + \frac{y_n^3}{3!} + \ldots$. Oczywiście $0 < y_n = \ln(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$, więc $r_n = \frac{y_n^2}{2!} + \frac{y_n^3}{3!} + \ldots$ Mamy

$$\left|\frac{y_n^3}{3!} + \frac{y_n^4}{4!} + \frac{y_n^5}{5!} + \ldots\right| \leqslant \frac{|y_n|^3}{3!}\left(1 + \frac{|y_n|}{4} + \frac{|y_n|^2}{4^2} + \ldots\right) = \frac{\frac{|y_n|^3}{3!}}{1 - \frac{|y_n|}{4}}.$$

Dalej $\lim\limits_{n\to\infty} n y_n = 1$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\frac{|y_n|^3}{3!}}{1-\frac{|y_n|}{4}} = \lim\limits_{n\to\infty}(n y_n)^2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{|y_n|}{3!}}{1-\frac{|y_n|}{4}} = 1^2 \cdot \frac{0}{1-\frac{0}{4}} = 0$. Wobec tego

$$n^2 r_n = \frac{(n y_n)^2}{2!} + n^2\left(\frac{y_n^3}{3!} + \frac{y_n^4}{4!} + \frac{y_n^5}{5!} + \ldots\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2!} + 0 = \frac{1}{2}, \tag{2}$$

więc otrzymaliśmy obiecany wzór. W końcu

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(1+\frac{1}{n})^{n+p}}{e}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(e^{(n+p)\ln(1+\frac{1}{n})-1}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(e^{(n+p)(\frac{1}{n}-r_n)-1}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{p}{n}-nr_n-pr_n}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n(\frac{p}{n}-nr_n-pr_n)\frac{e^{\frac{p}{n}-nr_n-pr_n}-1}{\frac{p}{n}-nr_n-pr_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(p-n^2r_n-pnr_n)\frac{e^{\frac{p}{n}-nr_n-pr_n}-1}{\frac{p}{n}-nr_n-pr_n}=(p-\frac{1}{2}-0)\cdot 1=p-\frac{1}{2}.$$

Ostatnia równość wynika z tego, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} h_n=0$ oraz $h_n\neq 0$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{h}_{n}-1}{h_n}=1$, co łatwo wynika z tego, że $1+h\leqslant e^h\leqslant\frac{1}{1-h}$ dla $h<1$ albo z wzoru $e^h=1+\frac{h}{1!}+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\ldots$. Wobec tego szereg $\sum\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$ jest zbieżny dla $p-\frac{1}{2}>1$ i rozbieżny dla $p-\frac{1}{2}<1$. Pozostaje jeszcze $p=\frac{3}{2}$.

Udowodnimy, że w tym wypadku szereg $\sum\frac{n!e^n}{n^{n+p}}=\sum\frac{n!e^n}{n^{n+3/2}}$ jest rozbieżny. Porównamy go z szeregiem $\sum\frac{1}{n}$. Niech $d_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{3}{2}}}\Big/\frac{1}{n}=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. Oczywiście $d_n=d_1\cdot\frac{d_2}{d_1}\cdot\frac{d_3}{d_2}\cdot\frac{d_4}{d_3}\cdot\ldots\cdot\frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}\cdot\frac{d_n}{d_{n-1}}$. Niech $R_k=\ln(1+\frac{1}{k})-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}\right)=\frac{1}{2k^2}-r_k$. Z wzoru (2) wynika, że $\lim\limits_{k\to\infty}k^2R_k=0$. Zachodzą równości

$$\frac{d_{k+1}}{d_k}=\frac{ek^{k+\frac{1}{2}}}{(k+1)^{k+\frac{1}{2}}}=\frac{e}{(1+\frac{1}{k})^{k+\frac{1}{2}}}=e^{1-(k+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{k})}=e^{1-(k+\frac{1}{2})(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+R_k)}=e^{\frac{1}{4k^2}-(k+\frac{1}{2})R_k}.$$

Przyda się jeszcze ustalenie szybkości zbieżności ciągu (R_k) do 0. Wykażę, że $\lim\limits_{k\to\infty}k^3R_k=\frac{1}{3}$. Podobnie jak poprzednio stwierdzamy bez trudu, że

$$\left|\frac{y_k^4}{4!}+\frac{y_k^5}{5!}+\ldots\right|\leqslant\frac{|y_k|^4}{4!(1-\frac{|y_k|}{5})}. \tag{4}$$

Niech $\varrho_k=\frac{y_k^4}{4!}+\frac{y_k^5}{5!}+\ldots$. Z nierówności (4) wynika, że $k^3\varrho_k=k^3\left|\frac{y_k^4}{4!}+\frac{y_k^5}{5!}+\ldots\right|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$. Mamy $1+\frac{1}{k}=e^{y_k}=1+y_k+\frac{y_k^2}{2!}+\frac{y_k^3}{3!}+\varrho_k$, zatem

$$\frac{1}{k}=y_k+\frac{y_k^2}{2!}+\frac{y_k^3}{3!}+\varrho_k=\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+R_k+\frac{1}{2}(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+R_k)^2+\frac{1}{6}(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+R_k)^3+\varrho_k=$$
$$=R_k+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^3}(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})+\tilde{\varrho}_k,$$

gdzie $\tilde{\varrho}_k$ jest sumą tych składników długawej sumy, które po pomnożeniu przez k^3 dążą do 0, np. $\frac{1}{8k^4}$, $\frac{1}{k}R_k$, R_k^2 itd. Mamy więc $R_k=\frac{1}{3k^3}-\tilde{\varrho}_k$, zatem $k^3R_k=\frac{1}{3}-k^3\tilde{\varrho}_k\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{1}{3}$. Stąd wynika, że istnieje taka liczba L, że $|(k+\frac{1}{2})R_k|\leqslant\frac{L}{k^2}$. Stąd zaś wynika, że szereg $\sum\left(\frac{1}{4k^2}-(k+\frac{1}{2})R_k\right)$ jest zbieżny i to bezwzględnie. Stąd wynika, że ciąg (d_n) ma granicę skończoną i dodatnią, a to oznacza, że szereg $\sum\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{3}{2}}}$ jest rozbieżny (tak jak szereg $\sum\frac{1}{n}$).