60. Niech $a = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$. Dowieść, że $a = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)$.

61. Dowieść, że ciąg o wyrazie $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ jest ograniczony z góry przez 2.

62. Niech $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\ldots+\frac{1}{n^4}$. Dowieść, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ lub dowieść, że ta granica nie istnieje.

63. Niech $k\in\mathbb{N}$ i $s_n = 1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{n^k}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{n^{k+1}}$ and $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{n^{k+2}}$.

64. Niech $k\in\mathbb{N}$. Oliczyć $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k-\frac{n^{k+1}}{k+1}\right)n^{-k}$.

65. Niech $a_1\in\mathbb{R}$ i niech $a_{n+1} = a_n^3-6a_n^2+12a_n-6$. Wyjaśnić, czy ciąg (a_n) ma granicę i jeśli ma, znaleźć ją. Wynik może zależeć od a_1.

66. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\ldots\cdot(1+x^{2^n})$.

67. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

68. Niech c, a_1, b_1 będą liczbami dodatnimi. Definiujemy $a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{c}{a_n^2}\right)$, $b_{n+1} = \frac{1}{3}\left(b_n+\frac{2c}{b_n^2}\right)$. Udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{c} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Który z ciągów $(a_n),(b_n)$ dąży szybciej do $\sqrt[3]{c}$? – by odpowiedzieć na to pytanie trzeba najpierw nadać mu sens i to ścisły.

Rozwiązanie. Wszystkie wyrazu ciągów (a_n), (b_n) są dodatnie – banalna indukcja. Z nierówności o średniej arytmetycznej i geometrycznej wynika, że

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(a_n+a_n+\frac{c}{a_n^2}\right) \geqslant \sqrt[3]{a_n\cdot a_n\cdot\frac{c}{a_n^2}} = \sqrt[3]{c}.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n = \frac{c}{a_n^2}$, czyli gdy $a_n\sqrt[3]{c}$. Podobnie otrzymujemy

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{b_n}{2}+\frac{b_n}{2}+\frac{2c}{b_n^2}\right) \geqslant \sqrt[3]{\frac{b_n}{2}\cdot\frac{b_n}{2}\cdot\frac{2c}{b_n^2}} = \sqrt[3]{\frac{c}{2}}.$$

W tym wypadku równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{b_n}{2} = \frac{2c}{b_n^2}$, więc gdy $b_n = \sqrt[3]{4c}$. Oba ciągi są więc ograniczone z dołu przez liczby dodatnie. Ponieważ zachodzą związki $a_{n+1}-a_n = \frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{c}{a_n^2}\right)-a_n = \frac{c-a_n^3}{2a_n^2} \leqslant 0$, więc $a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant \ldots$, zatem ciąg (a_n) ma granicę. Jasne jest, że $a_2 \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant \sqrt[3]{c}$, więc granica ta jest skończona. Z wzoru rekurencyjnego wynika, że jeśli $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, to $A = \frac{1}{3}(2A+\frac{c}{A^2})$, więc $A = \sqrt[3]{c}$.

Ciąg (b_n) nie jest na ogół monotoniczny. Udowodnimy, że jest zbieżny. Dla skrócenia zapisu definiujemy pomocniczą funkcję: $f(x) = \frac{1}{3}(x+\frac{2c}{x^2}) = \frac{x^3+2c}{3x^2}$. Napiszmy wzór

(1) $$b_{n+1}-b_n = f(b_n)-b_n = \frac{2(c-b_n^3)}{3b_n^2}.$$

. Mamy

(2) $$b_{n+2}-b_n = \frac{b_{n+1}^3+2c}{3b_{n+1}^2}-b_n = \frac{(\frac{b_n^3+2c}{3b_n^2})^3+2c}{3(\frac{b_n^3+2c}{3b_n^2})^2}-b_n = \frac{(b_n^3+2c)^3+54cb_n^6}{9b_n^2(b_n^3+2c)^2}-b_n =$$

$$= \frac{(b_n^3+2c)^3+54cb_n^6-9b_n^3(b_n^3+2c)^2}{9b_n^2(b_n^3+2c)^2} = \frac{-8b_n^9+24cb_n^6-24c^2b_n^3+8c^3}{9b_n^2(b_n^3+2c)^2} = -8\frac{(b_n^3-c)^3}{9b_n^2(b_n^3+2c)^2}.$$

Mamy też

(3) $\quad b_{n+1} - \sqrt[3]{c} = \dfrac{b_n^3 + 2c}{3b_n^2} - \sqrt[3]{c} = \dfrac{b_n^3 + 2c - 3b_n^2\sqrt[3]{c}}{3b_n^2} = \dfrac{(b_n - \sqrt[3]{c})(b_n^2 - 2b_n\sqrt[3]{c} - 2\sqrt[3]{c}^2)}{3b_n^2}.$

Zauważmy jeszcze, że jeśli $0 < x < y$ to

(4) $f(y) - f(x) = \dfrac{y^3 + 2c}{3y^2} - \dfrac{x^3 + 2c}{3x^2} = \dfrac{y^3x^2 + 2cx^2 - x^3y^2 - 2cy^2}{3x^2y^2} = \dfrac{(y-x)(y^2x^2 - 2c(x+y))}{3x^2y^2}$

Z wzoru (1) wynika, że jeśli $b_n > \sqrt[3]{c}$, to $b_{n+1} < b_n$.

Z wzoru (3) wynika, że jeśli $0 < b_n < \sqrt[3]{c}$, to $b_{n+1} > \sqrt[3]{c}$.

Natomiast z wzoru (2) wnioskujemy, że jeśli $b_n > \sqrt[3]{c}$, to $b_{n+2} < b_n$. Dodajmy jeszcze, że jeśli $b_n = \sqrt[3]{c}$, to $b_{n+1} = \sqrt[3]{c}$ i w związku z tym dla każdego $m > n$ mamy wtedy $b_m = \sqrt[3]{c}$.

Z wzoru (4) wnioskujemy, że jeśli $0 < x < y \leqslant \sqrt[3]{4c}$, to $f(y) - f(x) < 0$, więc funkcja f jest ściśle malejąca na przedziale $(0, \sqrt{4c}]$ (odwraca kierunek nierówności). Jeśli natomiast $\sqrt[3]{4c} \leqslant x < y$, to $f(y) - f(x) > 0$, więc na półprostej funkcja f jest ściśle rosnąca (zachowuje kierunek nierówności).

Jeśli w ciągu (b_n) występuje wyraz różny od $\sqrt[3]{c}$, to dla pewnego n zachodzi nierówność $b_n > \sqrt[3]{c}$. Wtedy $b_{n+1} < b_n$ i ciąg maleje dopóty dopóki nie pojawi się taka liczba $m > n$, że $b_m \leqslant \sqrt[3]{c}$. Jeśli $b_m = \sqrt[3]{c}$ to od tego momentu wszystkie wyrazy ciągu są równe $\sqrt[3]{c}$, więc ta liczba jest granicą ciągu (b_n). Jeśli $b_m < \sqrt[3]{c}$, to również $\sqrt[3]{\frac{c}{2}} \leqslant b_{m+1}$, więc $b_{m+2} = f(b_{m+1}) \leqslant f(\sqrt[3]{\frac{c}{2}}) = \frac{\frac{c}{2}+2c}{3\sqrt[3]{\frac{c^2}{4}}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{c}{2}} \in (\sqrt[3]{c}, \sqrt[3]{c}(1+\sqrt{3}))$, więc $b_{m+3} = f(b_{m+2} < f\left(\sqrt[3]{c}(1+\sqrt{3})\right) = \sqrt[3]{c}$. Wynika stąd, że $b_m < b_{m+2} < b_{m+4} < \ldots < \sqrt[3]{c}$ oraz $b_{m+1} > b_{m+3} > b_{m+5} > \ldots > \sqrt[3]{c}$. Oba te ciągi są zbieżne. Granica każdego z nich spełniać musi równanie $g = f(f(g))$, a to jak wynika z równości (2) stać się może wyłącznie dla $g = \sqrt[3]{c}$. Ta liczba jest więc granicą ciągu (b_n).

Udowodniliśmy, że oba ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do liczby $\sqrt[3]{c}$. Jeśli pewien wyraz któregoś z ciągów jest równy granicy, to wszystkie następne też są równe, więc tu zbieżność jest maksymalnie szybka wedle jakiejkolwiek w miarę sensownej definicji. Załóżmy więc, że $a_n \neq \sqrt[3]{c} \neq b_n$ dla każdego n. Z wzoru $a_{n+1} - \sqrt[3]{c} = \frac{2a_n^3+c-3a_n^2\sqrt[3]{c}}{3a_n^2} = \frac{(a_n-\sqrt[3]{c})^2(2a_n+\sqrt[3]{c})}{3a_n^2}$ wyniknie po krótkim rozumowaniu istnienie takich liczb $c > 0$ i $q \in (0,1)$, że $a_n - \sqrt[3]{c} < cq^{2^n}$ tak jak w wypadku dyskutowanym w czasie ćwiczeń, więc ten ciąg okaże się być zbieżny bardzo szybko do do swej granicy. Inaczej będzie w wypadku ciągu (b_n). Tu $|b_{n+1} - \sqrt[3]{c}| = \left|\frac{(b_n-\sqrt[3]{c})(b_n^2-2b_n\sqrt[3]{c}-2\sqrt[3]{c^2})}{3b_n^2}\right|$. Gdy $b_n \approx \sqrt[3]{c}$, to $|b_{n+1} - \sqrt[3]{c}| \approx |b_n - \sqrt[3]{c}|$, bo $b_n^2 - 2b_n\sqrt[3]{c} - 2\sqrt[3]{c^2} \approx -3\sqrt[3]{c^2}$, więc tu żadnego szybkiego zbliżania się dio granicy oczekiwać nie można.

Zagadka. Czy istnieje taki wykładnik w, że $\lim\limits_{n\to\infty} n^w|b_n - \sqrt[3]{c}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$? Ale to zagadka na później.

69. Niech $a_0 > 0$ i $a_{n+1} = a_n^2 - 10a_n + 30$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Znaleźć granicę ciągu (a_n) w zależności od a_0 .

70. Niech $a_0 \in (0,1)$ i niech $a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n)$. Udowodnić, że ciąg (a_n) ma granicę. Czy ciąg (a_n) jest monotnoniczny niezależnie od a_0?

71. Niech $a_0 \in (0,1)$ i niech $a_{n+1} = 3.1a_n(1 - a_n)$. Wykazać, że istnieje taka liczba $a_0 \in (0, \frac{1}{2})$, że ciąg (a_n) nie ma granicy (zawiera podciągi zbieżne do różnych granic). Czy teza zachodzi dla

ciągu (b_n) zdefinowanego tak: $b_0 \in (0,1)$, $b_{n+1} = 3b_n(1-b_n)$.
Tu $3.1 = \frac{31}{10}$ zgodnie ze zwyczajami panującymi w USA.

72. Niech $a, b > 0$. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

73. Niech $a > b > 0$ będą liczbami rzeczywistymi. Definiujemy $a1 = \frac{1}{2}(a+b)$, $b_1 = \sqrt{ab}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Udowodnić, że ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne i to do wspólnej granicy.

74. Dane są takie liczby dodatnie $r_1, r_2, r_3, \ldots$, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją koła o promieniach $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ zawarte w kwadracie Q, których wnętrza są parami rozłączne. Dowieść, ˙ze w kwadracie Q można umieścić koła o promieniach $r_1, r_2, r_3, \ldots$, których wnętrza są parami rozłączne.

75. Podać przykład takich dwóch ciągów (a_n), (b_n), że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ oraz

a. $\lim\limits_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = 0$, **b.** $\lim\limits_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = \frac{1}{2}$, **c.** $\lim\limits_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = 1$

d. $\lim\limits_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = 2$, **e.** $\lim\limits_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = \infty$, **f.** $\lim\limits_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n}$ nie istnieje.