50. Niech $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... Wykazać, ze ciąg (a_n) ma skończoną granicę.

51. Wykazać, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \big(1+a_n\big)^n = 1$.

52. Niech $a_1 > 0$ i $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$. Udowodnić, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę.

53. Niech $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ i $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$ dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę i znaleźć ją.

54. Niech $a_0 = 9$, $a_1 = 27$ i $a_{n+2} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}a_{n+1}$ dla każdego $n = 0, 1, 2, \ldots$. Wyjaśnić, czy ciąg (a_n) jest jest zbieżny. Jeśli ma granicę, znaleźć ją.

55. Wykazać, że jeśli $g > 0$ jest liczbą niewymierną, $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = g$, to zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \infty = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$.

56. Niech $x \in \mathbb{R}$. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\big(\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor\big)$.

57. Załóżmy, że ciąg (a_n) nie jest ograniczony z góry, ani z dołu oraz że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. Dowieść, że jeśli $x \in \mathbb{R}$, to istnieje taki ściśle rosnący ciąg (n_m), że $x = \lim\limits_{m\to\infty} a_{n_m}$, tzn: każda liczba rzeczywista jest granicą podciągu ciągu (a_n).

58. Niech $a_1 = 7$ i niech $a_{n+1} = \frac{1}{2}\big(a_n + \frac{7}{a_n}\big)$. Wykazać, że ciąg (a_n) ma granicę skończoną i znaleźć ją. Obliczyć (za pomocą jakiegoś urządzenia typu liczydło elektroniczne) 7 pierwszych wyrazów ciągu (a_n) i chwilę popatrzeć na wyniki.

59. Niech a i b będą liczbami dodatnimi. Niech $a_1 = b$ i niech $a_{n+1} = \frac{1}{2}\big(a_n + \frac{a}{a_n}\big)$. Wykazać, że istnieją takie liczby dodatnie c i $q \in (0,1)$, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność $\big|a_n - \sqrt{a}\big| < cq^{2^n}$. Wskazać konkretną parę liczb c, q w przypadku $a = 5$ i $b = 3$. Można wywnioskować stąd, że ciąg a_n jest bardzo szybko zbieżny do liczby $\sqrt{a}$, np. że liczba dokładnych cyfr liczby $\sqrt{a}$ przy zastąpieniu a_n przez a_{n+1} co najmniej podwaja się (dla dostatecznie dużych n, przy czym w przypadku $a = 5$, $b = 3$ jest tak nieomal od samego początku).

Do napisania w domu do piątku, 20 listopada 2020 r. są zadania o numerach parzystych