Całki niewłaściwe

Zaczniemy od kryteriów zbieżności całki niewłaściwej.

Twierdzenie 11.1 (asymptotyczne kryterium porównawcze)
Jeśli funkcje f, g są określone na przedziale $[a, b)$, całkowalne na każdym przedziale $[a, c]$, gdy $c \in (a, b)$, dodatnie i istnieje **skończona i różna od zera** granica $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$, to całki (niewłaściwe) $\int_a^b f(x)dx$ i $\int_a^b g(x)dx$ są jednocześnie skończone lub jednocześnie nieskończone. $\square$

To pełni ważną rolę w badaniu zbieżności całek niewłaściwych (podobnie jak odpowiednie kryterium zbieżności szeregów). Warto też pamiętać, że całka z mniejszej funkcji jest mniejsza od całki z większej funkcji, ale to w końcówce I roku studiów matematycznych jest tak oczywiste, że nie warto nadawać temu formy twierdzenia. Potrzebne jest jeszcze twierdzenie odpowiadające kryterium Abela–Dirichleta (chyba jeszcze nie dowiedzione na wykładzie, w każdym razie ja go nie zauważyłem. Ono w zasadzie brzmi tak samo jak dla szeregów.

Twierdzenie 11.2 (kryterium Abela – Dirichleta)
Dane są funkcje $f, g \colon (a, b) \to \mathbb{R}$, g jest monotoniczna, f jest całkowalna na każdym przedziale $[a, c]$ dla każdego $c \in (a, b)$. Wtedy:
(i) jeśli istnieje takie $M > 0$, że $|\int_a^c f(x)dx| \leqslant M$ dla każdego $c \in (a, b)$ i $\lim\limits_{x \to b} g(x) = 0$ lub
(ii) jeśli całka $\int_a^b f(x)dx$ jest skończona i granica $\lim\limits_{x \to b} g(x)$ jest skończona,
to całka $\int_a^b f(x)g(x)dx$ jest skończona (zbieżna).

Dla dowodu tego twierdzenia warto przytoczyć dwa twierdzenia o wartości średniej.

Twierdzenie 11.3 (o wartości średniej)
Jeśli $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, $g \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ — całkowalna w sensie Riemanna i nieujemna, to istnieje liczba $c \in [a, b]$ taka, że $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$. **Dowód.** Niech $m = \inf\{f(t)\colon \quad t \in [a, b]\}$, $M = \sup\{f(t)\colon \quad t \in [a, b]\}$. Dla każdego $x \in [a, b]$ zachodzi więc nierówność $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$. Wobec tego

$$m\int_a^b g(x)dx = \int_a^b mg(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \int_a^b Mg(x)dx = M\int_a^b g(x)dx$$

Jeśli $\int_a^b g(x)dx = 0$, to przyjmujemy np. $c = \frac{1}{2}(a + b)$. Jeśli $\int_a^b g(x)dx \ne 0$, czyli $\int_a^b g(x)dx > 0$, to otrzymujemy $m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$, a ponieważ funkcja f ma własność Darboux jako ciągła, więc istnieje taka liczba $c \in [a, b]$, że zachodzi równość $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$. Dowód został zakończony. $\blacksquare$

Twierdzenie 11.4 (drugie o wartości średniej)
Jeśli funkcja $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, funkcja $g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — monotoniczna, to istnieje liczba $c \in [a, b]$ taka, że

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx.$$

Proszę przeczytać przynajmniej początek dowodu. Co prawda piszę o wielomianach, ale równie dobrze mógłbym pisać o funkcjach klasy C^1. Dowód w tym prostym przypadku pokazuje, o co chodzi w twierdzeniu, a potem wykorzystywane są twierdzenia o przybliżeniu, aby uzyskać tezę w sytuacji ogólnej. Ta druga część jest w zasadzie oczywista, ale dla ludzi przyzwyczajonych do korzystania z przybliżeń, więc niektóre studentki i niektórzy studenci mogą się na początku dziwić, ale po pewnym czasie przyzwyczają się do rozumowań tego typu. To w końcu prawie tak samo jak w dowodzie istnienia funkcji pierwotnej funkcji ciągłej.

Dowód. Założymy najpierw, że funkcje f, g są wielomianami. Definiujemy nową funkcję: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Mamy

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(t)g'(t)dt.$$
Ponieważ funkcja g jest monotoniczna, więc jej pochodna g' jest nieujemna albo niedodatnia. Wynika stąd, że istnieje liczba $c \in [a,b]$ taka, że
$$\int_a^b F(t)g'(t)\mathrm{d}t = F(c)\int_a^b g'(t)dt = F(c)[g(b)-g(a)].$$
Wobec tego
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(c)[g(b)-g(a)] =$$
$$= g(a)[F(c)-F(a)] + g(b)[F(b)-F(c)] = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx.$$
Udowodniliśmy twierdzenie w tym przypadku.

Teraz przejdziemy do sytuacji ogólnej. Niech $M > 0$ będzie taką liczbą, że dla każdego $x \in [a,b]$ zachodzą nierówności $|f(x)|, |g(x)| < M$. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że g jest funkcją niemalejącą. Niech f_n, g_n będą takimi wielomianami, że $\int_a^b |f(x)-f_n(x)|dx < \frac{1}{n}$ i $\int_a^b |g(x)-g_n(x)|dx < \frac{1}{n}$ oraz $|f_n(x)|, |g(x)| \le M$. Możemy założyć, że wielomian g_n jest funkcją ściśle rosnącą oraz że $g_n(a) = g(a)$ i $g_n(b) = g(b)$ dla każdego n. Z już udowodnionej części twierdzenia wynika, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka liczba $c_n \in [a,b]$, że
$$\int_a^b f_n(x)g_n(x)dx = g(a)\int_a^{c_n} f(x)dx + g(b)\int_{c_n}^b f(x)dx.$$
Ciąg (c_n) może nie mieć granicy, ale można z niego wybrać podciąg zbieżny c_{n_k}. Niech $c = \lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k}$. Mamy teraz
$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_a^b f_n(x)g_n(x)dx\right| \le$$
$$\le \left|\int_a^b \big[f(x)-f_n(x)\big]g(x)dx + \int_a^b f_n(x)\big[g(x)-g_n(x)\big]dx\right| < \tfrac{1}{n}(b-a)M \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ Podobnie}$$
$$\left|\int_a^c f(x)dx - \int_a^{c_{n_k}} f_{n_k}(x)dx\right| \le \int_a^{c_{n_k}} \big|f(x)-f_{n_k}(x)\big|dx + \left|\int_c^{c_{n_k}} f(x)dx\right| \le$$
$$\le \int_a^b \big|f(x)-f_{n_k}(x)\big|dx + |c-c_{n_k}|\cdot M < \frac{1}{n_k} + |c-c_{n_k}|\cdot M \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$
$$\left|\int_c^b f(x)dx - \int_{c_{n_k}}^b f_{n_k}(x)dx\right| \le \int_{c_{n_k}}^b \big|f(x)-f_{n_k}(x)\big|dx + \left|\int_c^{c_{n_k}} f(x)dx\right| \le$$
$$\le \int_a^b \big|f(x)-f_{n_k}(x)\big|dx + |c-c_{n_k}|\cdot M < \frac{1}{n_k} + |c-c_{n_k}|\cdot M \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$
Wobec tego $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)g_n(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$, $\lim\limits_{k\to\infty}\left[g_{n_k}(a)\int_a^{c_{n_k}} f_{n_k}(x)dx\right] = g(a)\int_a^c f(x)dx$ i $\lim\limits_{k\to\infty}\left[g_{n_k}(b)\int_{c_{n_k}}^b f_{n_k}(x)dx\right] = g(b)\int_c^b f(x)dx$, a z tych równości teza wynika od razu. □

Twierdzenie 11.5 (Abela–Dirichleta dla całek)

Niech $g\colon [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją monotoniczną i ograniczoną i niech będzie spełnione jedno z założeń

(i) całka $\int_a^\infty f(x)dx$ istnieje i jest skończona;

(ii) dla każdego $x > a$ istnieje $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ i istnieje liczba $M > 0$ taka, że dla dowolnych $x_1, x_2 > a$ zachodzi nierówność $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t\right| \le M$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Wtedy całka $\int_a^\infty f(t)g(t)\mathrm{d}t$ jest zbieżna.

Dowód. Należy sprawdzić, że jest spełniony warunek Cauchy'ego zbieżności całki niewłaściwej. Niech ε będzie liczbą dodatnią. Ponieważ funkcja g jest monotoniczna, więc dla dowolnych liczb $x_1, x_2 \in (a,\infty)$, $x_1 < x_2$, istnieje liczba $c \in (x_1, x_2)$ taka, że
$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t)\mathrm{d}t = g(x_1)\int_{x_1}^c f(t)\mathrm{d}t + g(x_2)\int_c^{x_2} f(t)\mathrm{d}t.$$
Załóżmy, że spełniony jest warunek (i). Niech $M > 0$ będzie taką liczbą, że dla każdego $x \in (a,\infty)$ zachodzi $|g(x)| \le M$. Ponieważ całka $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ jest zbieżna, więc istnieje liczba $d > a$ taka, że jeżeli $x_1, x_2 > d$, to $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Stąd i z poprzednio napisanej równości wynika, że jeśli $d < x_1 < x_2$, to
$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t)dt\right| \leqslant \left|g(x_1)\int_{x_1}^c f(t)\mathrm{d}t + g(x_2)\int_c^{x_2} f(t)dt\right| < M\cdot\tfrac{\varepsilon}{2M} + M\cdot\tfrac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$
Drobne zmiany w tym dowodzie niezbędne dla przeprowadzenia dowodu przy założeniu warunku (ii) czytelnik powinien z łatwością wprowadzić sam. □

294. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ całka $\int_0^1 x^a dx$ jest skończona?

295. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ całka $\int_1^\infty x^a dx$ jest skończona?

296. Udowodnić, że całka $\int_0^\infty \sin x^2 dx$ jest zbieżna.

297. Udowodnić, że $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$. *Może warto przyjrzeć się całkom* $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ *oraz* $\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ *przy czym może za pomocą odpowiedniego podstawienia sprowadzić obie do całek po tym samym przedziale.*

298. Obliczyć $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$. *Może warto podstawić* $x = 2t$ *a potem rozbić przedział na dwa podprzedziały i chwilę popatrzeć?*

299. Niech $f\colon (0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ oznacza taką funkcję malejącą, że $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ i całka (niewłaściwa) $\int_0^a f(x) dx$ jest skończona. Dowieść, że $\int_0^a f(x) dx = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a}{n} \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} f(\frac{jn}{a})$.

300. Niech $f\colon [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ oznacza taką funkcję malejącą, że $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ i całka (niewłaściwa) $\int_0^\infty f(x) dx$ jest skończona. Dowieść, że $\int_0^\infty f(x) dx = \lim\limits_{h \to 0} h \sum\limits_{j=0}^{\infty} f(jh)$.

301. Obliczyć $\lim\limits_{x \to 0^+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{1 + x^2 n^2}$.

302. Niech $f\colon [0 \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ oznacza funkcję ciągłą, dla której istnieje skończona granica $g = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. Dowieść, że $\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} = (f(0) - g) \cdot \ln \frac{b}{a}$.

303. Obliczyć $\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}$.

304. Niech $I(a, k) = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin(ax)}{a} dx$ dla $a \geqslant 0$ i $k \geqslant 0$. Udowodnić, że $\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{k}{a^2 + k^2}$. ($\frac{\partial I}{\partial a}$ to pochodna wyrażenia $I(a, k)$ traktowanego jako funkcja zmiennej a przy ustalonym k).
Wywnioskować stad, że $I(a, k) = \operatorname{arctg} \frac{a}{k}$.
Wywnioskować stąd, że $\int \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.