40. Niech $A = \left\{ \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} + \frac{a}{d+a+b} : \quad a,b,c,d \in (0,\infty) \right\}$. Zapisać bardzo porządnie dowód (przeprowadzony w trakcie ćwiczeń) tego, że $\inf A = 1$.

41. Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem ograniczonym, tzn. istnieje taka liczba M, że dla każdego n zachodzi nierówność $|a_n| \leqslant M$. Niech elementami $\mathcal{P}$ będą takie przedziały otwarte $(P \in \mathcal{P})$ P, że $a_n \notin P$ jedynie dla skończenie wielu n. Niech $I = \bigcap \mathcal{P}$. Udowodnić, że I jest przedziałem domkniętym, którego końcami są $\liminf a_n$ oraz $\limsup a_n$.

42. Obliczyć granicę lub dowieść, że ciąg (a_n) nie ma granicy, jeśli $a_n =$

(a) $\frac{1+n+3n^7+n^2}{n^2-n+13}$;
(b) $\frac{1+n+3n+n^2}{n^2-n+13}$;
(c) $\frac{1+n+3n^7+n^2}{n^2-n^8+13}$;
(d) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
(e) $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$;
(f) $\sqrt{1+2^{(-1)^n}}$;
(g) $\sqrt[n]{1^k + 2^k + \cdots + n^k}$
(h) $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;
(i) $\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3-n+13}$;
(j) $\frac{n}{2^n}$;
(k) $\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{12}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{n+9}{2n-1}$;
(l) $\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;
(o) $\frac{n^{13}}{2^n}$;
(p) $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}$, $|q|<1$;
(r) nq^n, $|q|<1$;
(s) $1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}$, $|q|<1$.

43. Dowieść, że jeśli wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = g$.

44. Wykazać, że ciąg (a_n), gdzie $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+n}$ ma granicę skończoną

45. Wykazać, że ciąg (a_n), gdzie $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ ma granicę. Czy jest ona skończona?

46. Udowodnić, że każdy ciąg zbieżny zawiera wyraz najmniejszy lub największy.