249. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0\infty)$ będzie funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną i niech $f(x) = 0$ dla każdego $x < 0$ oraz $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ dla każdego $x > 0$ i każdego naturalnego n. Udowodnić, że wtedy $f(x) = 0$ dla każdego x.
Można zastanowić się, czy jakimś przypadkiem funkcja g_n zdefiniowana wzorem $g_n(x) = \frac{f(x)}{x^n}$ nie ma przypadkiem podobnych własności. Być może to wskaże metodę dowodu.

250. Niech $x > 0$ będzie liczbą rzeczywistą. Definiujemy $x_0 = x$ oraz $x_{n+1} = x^{x_n}$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Dla jakich x ciąg (x_n) jest monotoniczny?
Dla jakich x ciąg (x_n) jest monotoniczny i ograniczony?

251. Niech $a_0 = 1$ i niech $a_{n+1} = \sin a_n$. Dowieść, że ciąg (a_n) jest zbieżny i znaleźć jego granicę.

252. Niech (a_n) będzie ciągiem z poprzedniego zadania. Dowieść, że $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \infty$.
Co jest lepsze $\frac{n}{a_n^{-1}}$ czy $\frac{a_n}{n^{-1}}$? Kto to może wiedzieć ...

253. Jeszcze raz ciąg (a_n) z dwóch poprzednich zadań. Czy istnieje taka liczba $\alpha \in \mathbb{R}$, że granica ciągu $(n^\alpha a_n)$ jest skończona i dodatnia?

254. Niech $P_n(x) = ((x^2-1)^n)^{(n)}$. Udowodnić, że wielomian P_n ma n różnych pierwiastków i wszystkie leżą w przedziale $(-1, 1)$.

255. Niech $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$. Udowodnić, że H_n jest wielomianem n–tego stopnia oraz że dla parzystego n jest on funkcja parzystą, zaś dla nieparzystego n — nieparzystą.

256. Dowieść, że wielomian H_n z poprzedniego zadania ma n różnych pierwiastków rzeczywistych.

257. Niech f będzie różniczkowalną funkcją określoną na $\mathbb{R}$ i niech będzie ona rosnąca i ściśle wypukła i niech $f(x_0) < 0$ dla pewnego x_0. Udowodnić, że $f'(x) \neq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
Niech $a_0 \in \mathbb{R}$. Niech $(a_1, 0)$ będzie punktem leżącym na stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(a_0, f(a_0)$. Analogicznie $(a_2, 0)$ leży na stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(a_1, f(a_1))$. Definiujemy punkty a_n przez indukcję dla wszystkich $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
Udowodnić, że $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots$ oraz $f(a_n) \geqslant 0$.
Ciąg (a_n) jest więc nierosnący (od a_1) i ograniczony z dołu. Niech $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Obliczyć $f(A)$.
Wyrazić a_{n+1} za pomocą a_n, f i f' w formie $a_{n+1} = g(a_n)$. Obliczyć $g(A)$ i $g'(A)$.

258. Obliczyć a_{n+1} dla $f(x) = x^2 - 5$ rozpatrywanej na półprostej $(0, \infty)$. Napisać wzór w możliwie najprostszej postaci. Czym jest wtedy A zdefiniowane w poprzednim zadaniu?

259. Podać przykład takich funkcji różniczkowalnych $f_1, f_2, f_3, \ldots$, że ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji zerowej, a ciąg pochodnych w wielu punktach nie ma granicy.

260. Udowodnić, że jeśli ciąg wielomianów jest jednostajnie zbieżny na $(-\infty, +\infty)$, to granica tego ciągu jest wielomianem.

261. Niech $w_0(x) = 0$ dla $x \in [-1, 1]$ i niech $w_{n+1}(x) = w_n(x) + \frac{1}{2}\left(x^2 - w_n^2(x)\right)$. Udowodnić, że dla każdego $x \in [-1, 1]$ ciąg $(w_n(x))$ jest niemalejący i ograniczony z góry. Znaleźć jego granicę. Udowodnić, że na przedziale $[-1, 1]$ zbieżność ta jest jednostajna.