1. Znaleźć kresy zbioru $A = \{\frac{70k+11m}{2k+19m}: \quad k, m \in \mathbb{N}, k \geqslant 1000, k+m \geqslant 2000\}$

Rozwiązanie. Mamy $\frac{70k+11m}{2k+19m} < 35$ bo $70k + 11m < 35(2k + 19m) = 70k + 765m$, zatem 35 jest ograniczeniem górnym zbioru A. Jeśli $c < 35$, to nierówność $c < \frac{70k+11m}{2k+19m}$ równoważna jest nierówności $(19c - 11)m < (70 - 2c)k$, więc na mocy zasady Archimedesa istnieje taka liczba k, że $\frac{(19c-11)m}{70-2c} < m$, zatem c nie jest ograniczeniem górnym zbioru A. co w połączeniu z poprzednim zdaniem oznacza, że $\sup A = 35$. Nierówność $\frac{11}{19} < \frac{70k+11m}{2k+19m}$ jest równoważna nierówności $11(2k + 19m) < 19(70k + 11m)$, a to nierówności $22k < 1330k$, więc jest prawdziwa dla wszystkich dodatnich k. Załóżmy, że $\frac{11}{19} < d$. Nierówność $d > \frac{70k+11m}{2k+19m}$ jest równoważna $(19d - 11)m > k(70 - 2d)$, więc istnieje taka liczba m, że $m > \frac{k(70-2d)}{19d-11}$ – zasada Archimedesa, zatem d nie jest ograniczeniem dolnym zbioru A, zatem $\inf A = \frac{11}{19}$. Kresy zostały znalezione. $\square$

2. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n i liczb $k = k(n)$, że $|\sqrt{2} - \frac{k}{n}| < \frac{1}{n^2}$.

Rozwiązanie. Zaczniemy od ułamków łańcuchowych (ang. continued fractions) W XVIII wieku ludzie zaczęli zajmować się tzw. ułamkami łańcuchowymi. Pokażemy na przykładzie, w czym sprawa. Mamy np.

$$\frac{127}{48} = 2 + \frac{31}{48} = 2 + \frac{1}{1+\frac{17}{31}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{14}{17}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{14}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{2}{3}}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}$$

$$\sqrt{7} = 2 + (\sqrt{7} - 2) = 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+2}{3}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{\sqrt{7}-1}{3}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{7}+1}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{7}-1}{2}}} =$$

$= 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{\sqrt{7}+1}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{7}-2}{3}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{7}+2}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\sqrt{7}-2}}}}$, ale liczba $\sqrt{7} - 2$ pojawiła się wcześniej. Możemy więc od razu napisać wzór

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\sqrt{7}-2}}}} = \sqrt{7} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\sqrt{7}-2}}}}}}}}.$$

To postępowanie można kontynuować otrzymując nieskończony ułamek ułańcuchowy. „Urywając” go w kolejnych miejscach otrzymujemy kolejne przybliżenia liczby (zwane reduktami) $\sqrt{7}$:

$\frac{2}{1}$, $2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1}$, $2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{5}{2}$, $2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{8}{3}$, $2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}} = \frac{37}{14}$, $\ldots = \frac{45}{17}$, $\ldots = \frac{82}{31}$, $\ldots = \frac{127}{48}$, $\ldots = \frac{590}{223}$, $\ldots$

Można tak postąpić z dowolną liczbą dodatnią x, czyli można napisać, że $x = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\ldots}}}$, gdzie $a_0 \geqslant 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $\ldots$ są liczbami całkowitymi.

W istocie rzeczy $a_0 = \lfloor x \rfloor$ (dawniej $[x]$, jeszcze dawniej $E(x)$), czyli największą liczbą całkowitą, której wartość nie przekracza wartości liczby x ($a_0 \leqslant x < a_0+1$). Dalej $a_1 = \left\lfloor \frac{1}{x-a_0} \right\rfloor$, $a_2 = \left\lfloor \frac{1}{\frac{1}{x-a_0} - a_1} \right\rfloor$, itd.

Jeśli x jest liczbą wymierną, to ciąg (a_n) składa się ze skończenie wielu liczb, a jeśli $x \notin \mathbb{Q}$, to — z nieskończenie wielu. Wynika to stąd, że w przypadku liczby wymiernej ciąg kolejnych mianowników jest malejący, a ponieważ są to liczby całkowite dodatnie, więc jest skończony. Odwrotnie jeśli ułamek jest skończony, to liczba jest ilorazem dwu liczb całkowitych, po prostu upraszczamy ułamek piętrowy.

W dalszym ciągu zakładamy, że x **jest liczbą niewymierną,** by uniknąć pytań o długość ciągów (p_n) i (q_n) i również dlatego, że interesować nas będą głównie rozwinięcia liczb niewymiernych.

Oznaczmy
$a_0 = \lfloor x \rfloor$, $r_0 = x - a_0$, więc $x = a_0 + r_0$, $a_1 = \lfloor \frac{1}{r_0} \rfloor$, $r_1 = \frac{1}{r_0} - a_1$, więc $x = a_0 + r_0 = a_0 + \frac{1}{a_1+r_1}$, $a_2 = \lfloor \frac{1}{r_1} \rfloor$, $r_2 = \frac{1}{r_1} - a_2$, więc

$$x = a_0 + r_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + r_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2+r_2}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+r_3}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4+r_4}}}} = \dots$$

Wszystkie liczby w tych wzorach są dodatnie. Wobec tego $a_0 < x < a_0 + \frac{1}{a_1}$ – zmniejszenie mianownika ułamka powoduje zwiększenie ułamka. Powtarzając ten argument wiele razy (czyli dowodząc przez indukcję) otrzymujemy nierówności
$$a_0 < a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}} < a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4}}}} < \dots < x <$$
$$< a_0 + \frac{1}{a_1} < a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}} < a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4+\frac{1}{a_5}}}}} < \dots$$

Niech $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, więc $\frac{p_0}{q_0} = a_0$, $p_1 = a_1 a_0 + 1$, $q_1 = a_1$, więc $\frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}$. Podstawiamy teraz liczbę $a_1 + \frac{1}{a_2}$ w miejsce a_1 w otrzymanym właśnie wzorze i definiujemy $p_2 = a_2(a_1 a_0 + 1) + a_0 = a_2 p_1 + p_0$, $q_2 = a_2 a_1 + 1 = a_2 q_1 + q_0$. Mamy więc $\frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}}$ Po zastąpieniu a_2 przez $a_2 + \frac{1}{a_3}$ we wzorach na p_2 i q_2 oraz pomnożeniu otrzymanych wyrażeń przez a_3 otrzymujemy $p_3 = (a_3 a_2 + 1)p_1 + a_3 p_0 = a_3(a_2 p_1 + p_0) + p_1 = a_3 p_2 + p_1$ oraz $q_3 = (a_3 a_2 + 1)q_1 + a_3 q_0 = = a_3(a_2 q_1 + q_0) + q_1 = a_3 q_2 + q_1$. Zastępując a_3 przez $a_3 + \frac{1}{a_4}$ i mnożąc wyniki przez a_4 otrzymujemy wzory $p_4 = a_4 p_3 + p_2$ i $q_4 = a_4 q_3 + q_2$. Kontynuując (indukcja) otrzymujemy:

(rek) $$p_{n+2} = a_{n+2} p_{n+1} + p_n \quad \text{oraz} \quad q_{n+2} = a_{n+2} q_{n+1} + q_n.$$

Z tych wzorów i tego, że $p_n > 0, q_n > 0$ i $a_n \in \mathbb{N}$ wynika, że
$$p_0 < p_1 < p_2 < \dots \quad \text{i} \quad q_0 < q_1 < q_2 < \dots$$
Wiemy też, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < x < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$. Udowodnimy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$. Jest tak dla $n = 0$ – prościutki rachunek. Jeśli równość zachodzi dla pewnego n, to

$$p_{n+2}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+2} = (a_{n+2}p_{n+1} + p_n)q_{n+1} - p_{n+1}(a_{n+2}q_{n+1} + q_n) = p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = -(-1)^n = (-1)^{n+1},$$

zatem wzór prawdziwy jest również dla $n + 1$. Z tej równości wynika w szczególności, że każdy wspólny dzielnik liczb p_n i q_n jest dzielnikiem liczby $(-1)^n$, a to oznacza, że ułamki $\frac{p_n}{q_n}$ są nieskracalne. Z nierówności $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < x < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$ i równości $\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n}q_{2n+1}}$ wynika, że w przedziale $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}, \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)$ nie ma liczb postaci $\frac{r}{s} \neq x$, gdzie r, s są dodatnimi liczbami całkowitymi przy czym $s \leqslant q_{n+1}$: $\frac{r}{s} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{rq_{2n} - sp_{2n}}{sq_{2n}}$, $|rq_{2n} - sp_{2n}| \geqslant 1$, bo $rq_{2n} - sp_{2n} \neq 0$ jest liczbą całkowitą i $sq_{2n} \leqslant q_{2n}q_{2n+1}$. Poza tym zachodzi nierówność
$$0 < x - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Okazało się, ż każdą niewymierną liczbę można przybliżyć wymierną w taki sposób, by błąd był mniejszy od odwrotności kwadratu mianownika. **To pozwala znaleźć kres dolny zbioru A.**
Ten wynik nie jest całkiem oczywisty. To XVIII wiek, a nie starożytność. W 1851 r. J. Liouville zauważył, że prawdziwe jest następujące twierdzenie

Jeśli funkcja w jest wielomianem n–tego stopnia, o współczynnikach całkowitych, $n \geqslant 1$, a x_0 jego niewymiernym pierwiastkiem, to istnieje taka stała $C > 0$, że dla dowolnych liczb całkowitych p, q zachodzi nierówność $|x_0 - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{C}{q^n}$.

Dowód jest bardzo prosty i zaraz go pokażę. Ważniejsze od niego jest sformułowanie i zapewne, gdyby nie wiele lat, w czasie których zajmowano się rozwijaniem liczb w ułamki łańcuchowe, takie twierdzenie nie przyszłoby nikomu do głowy. Ale najpierw dowód.

Wielomian w ma co najwyżej n różnych pierwiastków, więc istnieje taka liczba $\delta > 0$, że przedział $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ nie zawiera żadnego pierwiastka, oczywiście poza x_0. Załóżmy, że $\frac{p}{q} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Wtedy $w(\frac{p}{q}) \neq 0$, zatem $q^n w(\frac{p}{q})$ jest liczbą całkowitą, różną od 0. Stąd wynika, że $q^n |w(\frac{p}{q})| \geqslant 1$. Wobec tego mamy

$$1 \leqslant q^n |w(\tfrac{p}{q})| = q^n |w(\tfrac{p}{q}) - w(x_0)|.$$

Dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ zachodzi nierówność (korzystamy z tego, że $|\frac{p}{q}| \leqslant |x_0| + \delta$, co wynika z nierówności trójkąta: $|\frac{p}{q} - x_0| \geqslant |\frac{p}{q}| - |x_0|$)

$$\left| x_0^k - \left(\tfrac{p}{q}\right)^k \right| \leqslant \left| x_0 - \tfrac{p}{q} \right| \cdot \left(|x_0|^{k-1} + |x_0|^{k-2} \cdot |\tfrac{p}{q}| + |x_0|^{k-3} \cdot |\tfrac{p}{q}|^2 + \ldots + |\tfrac{p}{q}|^{k-1} \right) \leqslant$$
$$\leqslant \left| x_0 - \tfrac{p}{q} \right| \cdot k(|x_0| + \delta)^{k-1}.$$

Jeśli $a_0, a_1, \dots, a_n$ są kolejnymi współczynnikami wielomianu w, czyli gdy dla każdego x zachodzi równość $w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ dla $x \in \mathbb{R}$ i gdy

$$L = |a_1| + 2|a_2|(|x_0| + \delta) + 3|a_3|(|x_0| + \delta)^2 + \ldots + k|a_k|(|x_0| + \delta)^{k-1},$$

to $1 \leqslant q^n \cdot |w(\frac{p}{q})| \leqslant q^n \cdot L \cdot \left| x_0 - \frac{p}{q} \right|$, więc przyjmując $C = \frac{1}{L}$ otrzymujemy tezę, dla $\frac{p}{q} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Dla wszystkich $\frac{p}{q}$ otrzymamy ją zmniejszając w razie potrzeby tę liczbę, np. przyjmując, że $C = \frac{1}{L + \frac{1}{\delta}}$ (wtedy $C < \frac{1}{L}$ i $C < \delta$). $\square$

Mówiłem w czasie ćwiczeń o rozwiązaniu zadania bez ułamków łańcuchowych, ale, gdy zacząłem pisać, rozumowanie zaczęło się komplikować i uznałem, że nie warto tego tak robić. Tym bardziej, że ułamki łańcuchowe to ważny temat, a poza tym zwalczanie problemów w nienapisanym dowodzie prowadzi jedynie do ukrycia ich obecności w nim.

Nowe zadania

31. Znaleźć kresy górny i dolny zbioru A, jeśli $A =$:

(a) $\{\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : \quad k, m, n \in \mathbb{N}\}$;
(b) $\left\{\frac{(m+n)^2}{2^{mn}} : \quad m, n \in \mathbb{N}\right\}$;
(c) $\left\{\frac{x}{x^2+1} : \quad x \in \mathbb{R}\right\}$;
(d) $\left\{\frac{1}{x^4+1} : \quad x \in \mathbb{R}\right\}$;
(e) $\left\{\frac{x^2+x+1}{3x^2+8} : \quad x \in \mathbb{R}\right\}$;

(f) $\left\{x^2+(xy-1)^2: \quad x,y\in\mathbb{R}\right\}$.

32. Znaleźć $\sup A, \inf A$, gdy $A=\left\{\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{c+d+a}+\frac{a}{d+a+b}: \quad a,b,c,d\in(0,\infty)\right\}$

33. Znaleźć wzory na a_n w przypadku $x=\sqrt{2}$ (a_n jak w tekście o ułamkach łańcuchowych.

34. Niech p_n, q_n będą jak w tekście o ułamkach łańcuchowych wyliczone dla $\sqrt{2}$. Obliczyć 6 pierwszych wyrazów obu ciągów oraz wielkość $p_n^2-2q_n^2$. Co da się powiedzieć ogólnie na temat liczby $p_n^2-2q_n^2$?