233. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-a}\ln x$ w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$.

234. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{\sin(\operatorname{tg} x)}$.

235. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

236. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\ln(\cos x))^5}{(x^2-\sin^2 x)(\operatorname{tg}^2 x)(\cos x-\cos 2x)^2}$.

237. Niech $f\colon (0,2) \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją różniczkowalną w punkcie 1, że $f(1) = 4 = f'(1)$. Obliczyć $\lim\limits_{h\to 0} \left(\frac{f(1+h)}{f(1+3h)}\right)^{1/h}$.

238. Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną i niech $b - a > 4$. Udowodnić, że istnieje taka liczba $c \in (a,b)$, że $f'(c) < 1 + (f(c))^2$.

239. Niech $f(x) = \cos^3 x$. Rozwinąć funkcję f w szereg Taylora wokół punktu 0 i obliczyć $f^{(2020)}(0)$ oraz $f^{(2021)}(0)$.

240. Niech f oznacza funkcję trzykrotnie różniczkowalną w pewnym otoczeniu zera i niech $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 6$. Niech $h(x) = f(f(x))$. Udowodnić, że istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $0 < |x| < \delta$, to $|h(x)| < |x|$.

241. Niech $\begin{cases} \cos\sqrt{x} & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \\ \cosh\sqrt{-x} & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$, przyp. $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Wyjaśnić, czy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie 0, a jeśli jest, to ile razy.

242. Dowieść, że funkcja $e^x\left(x^n e^{-x}\right)^{(n)}$ jest wielomianem stopnia n, który ma n różnych dodatnich pierwiastków.

243. Dla jakich $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ funkcja $x^{-5}\left(e^{-x} - \frac{1+ax+bx^2}{1+cx+dx^2}\right)$ jest ograniczona w pewnym otoczeniu liczby 0?

244. Niech $f(0) = 0$ i $f(x) = e^{-1/x^2}\sin\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$. Wykazać, że funkcja f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

245. Podać przykład takiej nieskończenie wiele razy różniczkowalnej funkcji f, że $xf(x) > 0$ dla $x \neq 0$ i że na żadnym przedziale postaci $[0,\delta]$, $\delta > 0$, funkcja ta nie jest wypukła ani wklęsła.

246. Dowieść, że istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $f(x) = 0$, gdy $x \leq 0$ oraz $f(x) > 0$, gdy $x > 0$.

247. Dowieść, że istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $f(x) = 0$, gdy $x \leq 0$, $0 < f(x) < 1$, gdy $0 < x < 1$ oraz $f(x) = 1$, gdy $x \geq 1$.

248. Dowieść, że istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $f(x) = 0$, gdy $|x| \geq 2$, $0 < f(x) < 1$, gdy $1 < |x| < 2$ oraz $f(x) = 1$, gdy $|x| \leq 1$.