Całki oznaczone

Poniżej są zadania na kilka ćwiczeń. Kolejność jest zbliżona – mam nadzieję – do tej, w której będziemy o nich mówić. Niektóre staną się domowymi, więc trzeba będzie ich rozwiązania napisać.

270. Udowodnić, że wielomiany Bernsteina funkcji niemalejącej są funkcjami niemalejącymi. (zob. wykład 18.)

271. Udowodnić, że jeśli funkcja $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^1, to $B_n(f)' \rightrightarrows f'$ czyli ciąg pochodnych wielomianów Bernsteina jest jednostajnie zbieżny do pochodnej funkcji f.

272. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez wykresy funkcji wiedząc, że pole obszaru $\{(x,y)\colon \quad a \leqslant x \leqslant b \text{ i } f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$ jest równe $\int_a^b (g(x)-f(x))\mathrm{d}x$:
a. $f(x) = x^2$ i $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$,
b. $f(x) = x^2$ i $g(x) = -x^2$ oraz proste $x = -1$, $x = 1$,
c. $f(x) = x^2$ i $g(x) = 1 - x^2$,
d. $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - x^2$ i $h(x) = 2$,
e. $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^2 - 2x + 4$ oraz oś OY,
f. $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = 0$ oraz prostą $x = 2$,
g. $f(x) = x^2$ oraz parabolę $x = y^2$,
h. $f(x) = x \sin 4x$ i $g(x) = 0$ oraz proste $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{8}$,
i. $F(y) = \frac{1}{2}y^2$ i okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

273. Niech $x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$, $y \geqslant 0$. Dowieść, że istnieje takie $t \in \mathbb{R}$, że $x = \cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ i $y = \sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$. Niech $A = \{(u,v)\colon \quad u^2 - v^2 \leqslant 1, |vx| \leqslant uy\}$. Udowodnić, że pole zbioru A równe jest t.
Uwaga. Jeśli $x > -1$, $y \geqslant 0$ i $x^2 + y^2 = 1$, to istnieje dokładnie jedna liczba $t \in [0,\pi)$, że $x = \cos t$, $y = \sin t$. Jeśli $A = \{(t\cos\tau, t\sin\tau)\colon \quad t \leqslant 1,\ |\tau| \leqslant t\}$, to $|A| = t$. Ta uwaga pokazuje geometryczne podobieństwo definicji sinusa i kosinusa oraz sinusa hiperbolicznego i kosinusa hiperbolicznego.

274. Porównać całki nie obliczając ich:
a. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^6 x \,\mathrm{d}x$ i $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^3 x \,\mathrm{d}x$,
b. $\int_0^1 e^{-x} \,\mathrm{d}x$ i $\int_0^1 e^{-x^2} \mathrm{d}x$.

275. Obliczyć objętość elipsoidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$. Przyjąć, że objętość to całka z pola przekroju płaszczyzną prostopadłą do osi.

276. Obliczyć długość krzywej o równaniu: $y^2 = 4x^3$, przy czym $y \geqslant 0$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{9}$ przyjmując, że długość wykresu funkcji f określonej na $[a,b]$ to całka $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x$.

277. Obliczyć długość krzywej o równaniu $y = 2\sqrt{x}$, przy czym $1 \leqslant x \leqslant 9$. Długość zdefiniowana w poprzednim zadaniu.

278. Określić znak całki
a. $\int_0^{2\pi} x \sin x \,\mathrm{d}x$, **b.** $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x \,\mathrm{d}x$,
c. $\int_{-2}^2 x^3 2^x \,\mathrm{d}x$, **d.** $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x$.

279. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ obliczając pewną całkę, jeśli $a_n =$

(a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots \frac{1}{n+n}$, (b) $\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$,

(c) $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, (d) $\frac{1^7+2^7+\cdots+n^7}{n^8}$.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \sin\frac{\pi}{n^2} + \frac{n+2}{n} \sin\frac{2\pi}{n^2} + \cdots + \frac{2n-1}{n} \sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right)$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-2} \sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{(nx+j)(nx+j+1)}$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{e^{1/n}}{n+1} + \frac{e^{2/n}}{n+1/2} + \cdots + \frac{e^{n/n}}{n+1/n}\right)$

280. Znaleźć pochodną funkcji f, jeśli $f(x) =$

a. $\int_1^{x+1} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$, **b.** $\int_1^{x^2} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$, **c.** $\int_{x-1}^{1} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$, **d.** $\int_{x-1}^{x^2} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Definicja 10.1 (zbioru miary 0)
Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ ma miafrę 0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdel liczby $\varepsilon > 0$ istnieją takie przedziały $I_1, I_2, \ldots$, że $A \subseteq I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$, gdzie $|I_n|$ oznacza długość przedziału I_n. $\square$

Twierdzenie 10.2 (o całkowalności w sensie Riemanna)
Funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ jest ograniczona i jej zbiór punktów nieciągłości ma miarę 0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $I \in \mathbb{R}$, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, $t_j \in [x_j, x_{j+1}]$, to

$$|I - \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)(x_{j+1} - x_j)| < \varepsilon.$$

Na wykładzie udowodniono, że każda funkcja ciągła f na przedziale domkniętym jest całkowalna w sensie Riemanna oraz że w wtedy $I = \int_a^b f(x)dx$. Również każda funkcja schodkowa na przedziale domkniętym jest całkowalna w sensie Riemanna i jej całka to suma całek na tych przedziałach, na których jest ona stała.

281. Niech $f(x) = 1$, gdy $x \in \mathbb{Q}$ oraz $f(x) = 0$, gdy $x \notin \mathbb{Q}$. Rozstrzygnąć, czy istnieje $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Jeśli istnieje, obliczyć.

282. Niech $f(x) = \frac{1}{q}$, gdy $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geqslant 1$ i $\mathrm{NWD}(p,q) = 1$ oraz $f(x) = 0$, gdy $x \notin \mathbb{Q}$. Rozstrzygnąć, czy istnieje $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Jeśli istnieje, obliczyć.

283. Niech $f(x) = \frac{1}{n}$, gdy $\frac{1}{n+2} < x \leqslant \frac{1}{n+1}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $f(x) = 0$. Rozstrzygnąć, czy istnieje $\int_0^{1/2} f(x)\mathrm{d}x$. Jeśli istnieje, obliczyć.

284. Wykazać, że złożenie funkcji całkowalnych w sensie Riemanna nie musi być funkcją całkowalną w sensie Riemanna. Czy wystarczy dodatkowo założyć, że funkcja wewnętrzna jest ciągła? Czy wystarczy dodatkowo założyć, że funkcja zewnętrzna jest ciągła?

285. Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, to $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0$. Można zacząć od funkcji klasy C^1.

286. Wykazać, że jeśli dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi równość $\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x = 0$, to funkcja f jest równa 0 prawie wszędzie, tzn. zbiór tych punktów, w których wartości funkcji f są różne od 0 ma miarę 0.

287. Wykazać, że jeśli f jest nieujemną funkcją niemalejącą, wklęsłą, klasy C^2 na półprostej $[1, \infty)$, to ciąg $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$ o wyrazie $a_k = \sum\limits_{n=1}^{k} f(n) - \int_1^k f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}f(k)$ jest ograniczony.

288. Udowodnić, że zbiór Cantora, tzn. zbiór tych liczb z przedziału $[0, 1]$, które można zapisać w układzie trójkowym nie używając cyfry 1 ma miarę 0.

289. Udowodnić, że każdy zbiór przeliczalny lub skończony ma miarę 0.

290. Dowieść, że suma przeliczalnej rodziny zbiorów miary 0 ma miarę 0. Można skorzystać z równości $\varepsilon = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}$.

291. Udowodnić, że istnieje taka ściśle rosnąca funkcja ciągła $h\colon [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, że obraz zbioru Cantora nie jest miary 0.

292. Podać przykład takiej funkcji różniczkowalnej $f\colon [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, której pochodna nie jest całkowalna w sensie Riemanna.

293. Podać przykład takiej funkcji różniczkowalnej $f\colon [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, której pochodna jest ograniczona, ale nie jest całkowalna w sensie Riemanna.