W zbiorze wielomianów wprowadzona została relacja nierówności, którą oznaczę symbolem $\prec$. Przypomnę i uporządkuję nieco definicje.

Wielomianem nazywamy ciąg nieskończony

$$w := (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots),$$

w którym od pewnego miejsca występują same zera. Jeśli wszystkie wyrazy tego ciągu są zerami, to wielomian nazywamy zerowym. Mówimy, że stopniem wielomianu zerowego jest $-\infty$. Stopniem wielomianu niezerowego nazywamy największą nieujemną liczbę całkowitą n, dla której $a_n \neq 0$. Dodawanie i mnożenie wielomianów definiujemy jak zwykle (tylko zapis nieco inny)

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, 0, 0, 0, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots, 0, 0, 0, \dots = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, 0, 0, 0, \dots)$$

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, 0, 0, 0, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots, 0, 0, 0, \dots =$$
$$= (a_0b_0, a_1b_0 + a_0b_1, a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2, \dots, 0, 0, 0, \dots)$$

Można bez trudu sprawdzić, że tak zdefiniowane działania są łączne i przemienne, że mnożenie jest rozdzielne względem dodawania, że dodanie wielomianu zerowego do wielomianu w daje wynik w, że wielomian $(1, 0, 0, \dots)$ pełni rolę jedynki. nie jest też trudno sprawdzić, że na ogół nie istnieje odwriotność, np. jeśli $w = (1, 0, 0, \dots)$, to nie istnieje taki wielomian v, że $wv = (1, 0, 0, \dots)$ (łatwe!).

Czas na definicję nierówności. Najpierw definujemy $(0, 0, 0, \dots) \prec (a_0, a_1, a_2, \dots)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka nieujemna liczba całkowita n, że $0 < a_n$ oraz $a_m = 0$ dla każdego numeru $m > n$. Potem rozszerzamy definicję definiując $v \prec w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(0, 0, 0, \dots) \prec w - v$. Następnie sprawdzamy, że obu stro nierówności wolno dodać stronami dowolny wielomian oraz że wolno pomnożyć nierówność przez w, jeśli $(0, 0, 0, \dots) \prec w$. Zatem w zbiorze wielomianów mamy określone działania i nierówność w taki sposób, że spełnione są wszystkie pewniki z wyjątkiem istnienia odwrotności i nie ma w ogóle mowy o kresach. Jak mówiliśmy w czasie ćwiczeń dla każdej liczby rzeczywistej a zachodzi nierówność $(a, 0, 0, \dots) \prec (0, 1, 0, 0 \dots)$, bo $(0, 0, 0, \dots) \prec (-a, 1, 0, 0 \dots)$. Wobec tego w zbiorze tych wielomianów nie jest spełniona zasada Archimedesa.

Można rozważyć zbiór funkcji wymiernych, więc ilorazów wielomianów. Wprowadzamy definicję nie przejmując się zbiorem wartości wielomianu umieszczanego w mianowniku. Z formalnego punktu widzenia wygląda to tak. Rozważamy pary uporządkowane, które oznaczamy symbolem $\frac{u}{v}$, gdzie u, v są wielomianami przy czym $v \neq (0, 0, 0, \dots)$. Przyjmujemy, że dla każdego wielomianu $w \neq (0, 0, 0, \dots)$ i każdej funkcji wymiernej $\frac{u}{v}$ zachodzi równość $\frac{u}{v} = \frac{uw}{vw}$. Działania na takich ułamkach określamy w zwykły sposób: $\frac{u}{v} + \frac{u_1}{v_1} = \frac{uv_1 + u_1v}{vv_1}$ oraz $\frac{u}{v} \cdot \frac{u_1}{v_1} = \frac{uu_1}{vv_1}$. Sprawdzamy, że teraz wszystkie pewniki z wyjątkiem aksjomatu ciągłości (Dedekinda). Sa spełnione. Ta praca trochę trwa, ale nie wymaga nic poza odpowiednią ilości czasu.

Jasne jest, że pewnik ciągłości spełniony być nie może. Gdyby zachodził, byłaby też spełniona zasada Archimedesa, ale tak nie jest. Jaki zbiór nie ma kresu górnego? Poproszę o przykład.

Proszę też o przyjrzenie się zadaniom umieszczonym przez prof. Kałamajską na końcu trzeciego wykładu. Warto je omówić we wtorek, 27 października.

Na deser jeszcze drobna uwaga. W dowodzie niewymierności liczby $\sqrt{2}$ prof. Kałamajska nie korzystała z pojęcia liczby pierwszej, nic nie rozkładała na czynniki pierwsze. Idzie o to, że gdyby chciała rozkładać na czynniki pierwsze wypazdałoby najpierwa dowieść zarówno istnienia rozkładu na czynniki pierwsze jak i jego jednoznaczności, a to wymaga sporo czasu. Przedstawiony przez Nią dowód pochodzi od Dedekinda (XIX w. druga połowa). Wcześniej w zasadzie wszyscy przyjmowali to twierdzenie bez uzasadnienia. Jednak należy je uzasadniać lub z niego nie korzystać. Dowody tego twierdzenia są w różnych miejscach w internecie. Jednym z takich miejsc (łatwo dostępnym) jest tekst `https://www.mimuw.edu.pl/~krych/staszic/skrypt09-naturalne_D.pdf`. Na stronach 13,14 są podane 2. Zainteresowane osoby mogą tam zajrzeć. Można te z zaczekać na wykład z algebry chyba na drugim roku, na którym rzecz powinna się pojawić.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ $\;\mathrm{NWD}(p,q) = 1$ Wtedy $p^2 = 2q^2$. $\Rightarrow$ p jest parzysta, czyli $p = 2k$, więc $4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2 \Rightarrow q = 2\ell \quad x^n - a, a \in \mathbb{Z}$

Zad. 44 $(k^2-m^2)^2+(2km)^2=(k^2+m^2)^2$ To równanie pokazuje, że istnieje nieskończenie wiele takich trójek liczb naturalnych x, y, z, dla których $x^2 + y^2 = z^2$ *(są to tzw. trójki pitagorejskie, jeśi każdą z nich pomnożymy przez liczbę całkowitą m, to otrzymamy wszystkie możliwe trójki pitagorejskie). Mamy np.
$1 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2k}{k^2+1}\right)^2\right) + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3(k^2-1)}{5(k^2+1)}\right)^2 + \left(\frac{6k}{5(k^2+1)}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2$, więc istnieje nieskończenie wiele takich trójek dodatnich liczb wymiernych x, y, z, że $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Uwaga: $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} = 4$

Czy liczba $A = \sqrt{\sqrt{2019}+2019} - \sqrt{\sqrt{2019}+\frac{1}{2019}}$ jest wymierna?

Załóżmy, że $A \in \mathbb{Q}$. Z definicji liczby A wynika, że $A^2 + 2A\sqrt{\sqrt{2019}+\frac{1}{2019}} + \frac{1}{2019} = 2019$, a to oznacza, że $\sqrt{2019} = \frac{1}{A^2}\left((2019 - \frac{1}{2019} - A^2)^2 - \frac{1}{2019})\right) \in \mathbb{Q}$, co przeczy temu, że $\sqrt{2019} \notin \mathbb{Q}$, $44^2 < 2019 < 45^2$

Jakieś opowieści o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze w różnych sytuacjach można znaleźć w opowiadaniu o różnych rzeczach, które jest tu `https://www.mimuw.edu.pl/~krych/odczyty/18-06-15-mszana.pdf`