Udowodnimy, że jeśli $0 < x < \frac{\pi}{2}$, to $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$. Punktem wyjścia będzie nierówność

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x\,, \tag{1}$$

która zachodzi dla każdego $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Będziemy też korzystać z równości

$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\,, \tag{2}$$

która wynika z tego, że $\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha\cos(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

Z tego, że $0 < \cos x < 1$ i z nierówności (1) wynika, że $x\cos^2 x < x\cos x < \sin x < x$. Stąd wynika, że $x - x^3 = x(1-x^2) < x(1-\sin^2 x) = x\cos^2 x < \sin x < x$, więc

$$x - x^3 < \sin x < x\,. \tag{N}$$

Z równości (2) i nierówności (N) wynika, że

$$x > \sin x = \sin(3\tfrac{x}{3}) = 3\sin\tfrac{x}{3} - 4\sin^3\tfrac{x}{3} > 3\left(\tfrac{x}{3} - \left(\tfrac{x}{3}\right)^3\right) - 4\left(\tfrac{x}{3}\right)^3 = x - \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{27}\right)x^3.$$

Załóżmy, że $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{27}$. Jeśli $0 < a$ i $x - ax^3 < \sin x < x$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, to

$$x > \sin x = \sin(3\tfrac{x}{3}) = 3\sin\tfrac{x}{3} - 4\sin^3\tfrac{x}{3} > 3\left(\tfrac{x}{3} - a\left(\tfrac{x}{3}\right)^3\right) - 4\left(\tfrac{x}{3}\right)^3 = x - \left(\tfrac{a}{9} + \tfrac{4}{27}\right)x^3.$$

Przyjmijmy teraz, że $a_{n+1} = \frac{1}{9}a_n + \frac{4}{27}$. Ponieważ $a_1 > a_2$, więc $a_2 = \frac{1}{9}a_1 + \frac{4}{27} > \frac{1}{9}a_2 + \frac{4}{27} = a_3$, zatem $a_3 = \frac{1}{9}a_2 + \frac{4}{27} > \frac{1}{9}a_3 + \frac{4}{27} = a_4$ itd. Ciąg (a_n) jest więc ściśle malejący. Jest też złożony z liczb dodatnich, a nawet większych od $\frac{4}{27}$, więc jest ograniczony z dołu, a stąd wynika, że ma granicę. Niech $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Z definicji wynika więc, że $1 > L \geqslant \frac{4}{27}$. Zachodzą równości

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9}a_n + \frac{4}{27} = \frac{1}{9}L + \frac{4}{27}\,.$$

Wynika stąd, że $\frac{8}{9}L = \frac{4}{27}$ i wobec tego $L = \frac{1}{6}$. Ponieważ dla każdego n i dla każdego $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ zachodzi nierówność $x > \sin x > x - a_n x^3$, więc zachodzi też nierówność

$$x > \sin x \geqslant x - \lim_{n\to\infty} a_n x^3 = x - \frac{1}{6}x^3\,.$$

Ostatnia nierówność jest nieostra, bo została otrzymana przez przejście do granicy. Zauważmy jednak, że jeśli $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ to $\sin\frac{x}{3} < \frac{x}{3}$, więc z wzoru (2) otrzymujemy

$$\sin x = 3\sin\frac{x}{3} - 4\sin^3\frac{x}{3} > 3\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{3}\right)^3\right) - 4\left(\frac{x}{3}\right)^3 = x - \frac{1}{6}x^3\,.$$

We shall prove that if $0 < x < \frac{\pi}{2}$ then $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$. We start from the well known inequality

$$\textbf{(1)} \qquad \sin x < x < \operatorname{tg} x\,,$$

which holds for all $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

We shall also use the equation

$$\textbf{(2)} \qquad \sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\,,$$

which can be shown as follows
$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha\cos(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha =$
$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$

It follows from $0 < \cos x < 1$ and inequality (1) that $x\cos^2 x < x\cos x < \sin x < x$. Therefore $x - x^3 = x(1-x^2) < x(1-\sin^2 x) = x\cos^2 x < \sin x < x$ so

$$\textbf{(N)} \qquad x - x^3 < \sin x < x\,.$$

The equation (2) and the inequality (N) imply that

$$x > \sin x = \sin(3\tfrac{x}{3}) = 3\sin\tfrac{x}{3} - 4\sin^3\tfrac{x}{3} > 3\left(\tfrac{x}{3} - \left(\tfrac{x}{3}\right)^3\right) - 4\left(\tfrac{x}{3}\right)^3 = x - \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{27}\right)x^3.$$

Let us define $a_1 = 1$ and $a_2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{27}$. If $0 < a$ and $x - ax^3 < \sin x < x$ for $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ then

$$x > \sin x = \sin(3\tfrac{x}{3}) = 3\sin\tfrac{x}{3} - 4\sin^3\tfrac{x}{3} > 3\left(\tfrac{x}{3} - a\left(\tfrac{x}{3}\right)^3\right) - 4\left(\tfrac{x}{3}\right)^3 = x - \left(\tfrac{a}{9} + \tfrac{4}{27}\right)x^3.$$

Let $a_{n+1} = \frac{1}{9}a_n + \frac{4}{27}$. Since $a_1 > a_2$ we have $a_2 = \frac{1}{9}a_1 + \frac{4}{27} > \frac{1}{9}a_2 + \frac{4}{27} = a_3$ so $a_3 = \frac{1}{9}a_2 + \frac{4}{27} >$ $> \frac{1}{9}a_3 + \frac{4}{27} = a_4$ etc. The sequence (a_n) strictly decreases. Its terms are positive and moreover they are greater than $\frac{4}{27}$. A bounded from below and decreasing sequence has a finite limit. Let $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. It follows from the definition that $1 > L \geqslant \frac{4}{27}$. The following equalities hold

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9}a_n + \frac{4}{27} = \frac{1}{9}L + \frac{4}{27}\,.$$

Therefore $\frac{8}{9}L = \frac{4}{27}$ thus $L = \frac{1}{6}$. For each n and each $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ we have $x > \sin x > x - a_n x^3$. This implies that

$$x > \sin x \geqslant x - \lim_{n\to\infty} a_n x^3 = x - \frac{1}{6}x^3\,.$$

The last inequality has been obtained by passing to the limit and for this reason it is not sharp yet. Let us notice that if $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ then $\sin\frac{x}{3} < \frac{x}{3}$, so using (2) we get

$$\sin x = 3\sin\frac{x}{3} - 4\sin^3\frac{x}{3} > 3\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{3}\right)^3\right) - 4\left(\frac{x}{3}\right)^3 = x - \frac{1}{6}x^3\,.$$