ZADANIA DOMOWE seria 7

termin oddania: 09.02.2011

Do zdobycia **50 punktów**. Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić ;)

1. Wykazać, że następujące szeregi są zbieżne i znaleźć ich granice:

   (a) (10pkt) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$,

   (b) (10pkt) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$,

   (c) (10pkt) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$,

   (d) (10pkt) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

2. (10pkt) Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

3. (10pkt) Dany jest szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zbieżny warunkowo (tzn. szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i **nie** jest zbieżny bezwzględnie). Udowodnić, że istnieje bijekcja $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ taka, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ jest rozbieżny do $+\infty$.

ZADANIA DOMOWE seria 8

termin oddania: 03.03.2011

Do zdobycia **50 punktów**. Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić ;)

1. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną następujących szeregów:

   (a) (10pkt) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$,

   (b) (10pkt) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$,

   (c) (10pkt) $\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$,

   (d) (10pkt) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}$,

   (e) (10pkt) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n^2)$.

2. (10pkt) Udowodnić, że jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$ jest zbieżny, to ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny. Czy jest prawdą twierdzenie odwrotne, tzn. jeśli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$ jest zbieżny?

ZADANIA DOMOWE seria 9

termin oddania: 10.03.2011

Do zdobycia **50 punktów**. Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić ;)

1. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną następujących szeregów:

   (a) (10pkt) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$,

   (b) (10pkt) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$,

   (c) (10pkt) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$,

   (d) (10pkt) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^n$,

   (e) (10pkt) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+(-1)^n)^n}{4^n}$.

2. (10pkt) Udowodnić, że jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$ jest zbieżny, ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do zera i sumy częściowe seregu $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ są wspólnie ograniczone, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.