

**ZADANIA DOMOWE seria 10**

termin oddania: 21.04.2011

Do zdobycia **50 punktów**. Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić ;)

- (10pkt) Dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej  $n \in \mathbb{N}^*$ , obliczyć  $\frac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}$ .
- (10pkt) Znaleźć wszystkie rozwiązania następującego układu równań liniowych

$$\begin{cases} (1-i)x_1 + ix_2 + 2x_3 - ix_4 = 1+i \\ (1+i)x_1 + x_2 + 2ix_3 + (1+2i)x_4 = 1-i \\ ix_1 + \phantom{x_2} + (-1+i)x_3 + ix_4 = 0 \end{cases}.$$

- (10pkt) Znaleźć liczbę zespoloną  $z \in \mathbb{C}$  taką, że  $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{3+4i}{5}$ .
- (10pkt) Rozwiązać równanie  $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$ .
- Narysować na płaszczyźnie zespolonej  $\mathbb{C}$  następujące zbiory
  - (5pkt)  $A_1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$  i  $A_2 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = i\}$ .
  - (5pkt)  $B = \{z \in \mathbb{C}: \frac{1}{2} < |z - i| < 1\}$ .
  - (5pkt)  $C = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}((1+i)z) \geq 1\}$ .

**ZADANIA DOMOWE seria 11**

termin oddania: 28.04.2011

Do zdobycia **50 punktów**. Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić ;)

- (10pkt) Narysować na płaszczyźnie zespolonej  $\mathbb{C}$  zbiory  $A$ ,  $\overline{f}[A]$  i  $\overline{g}[A]$ , gdzie  $A = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ ,  $f(z) = (1-i)z + 3$  i  $g(z) = -iz^4$ .
- (10pkt) Znaleźć wszystkie liczby  $z \in \mathbb{C}$  takie, że  $\bar{z} = z^n$ , gdzie  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Korzystając z tożsamości  $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$  dla  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , znaleźć wzory na
  - (10pkt)  $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$ .
  - (10pkt)  $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$ .
- (5pkt) Znaleźć wszystkie pierwiastki zespolone stopnia 2 z liczby  $1 - 2\sqrt{2}i$ .
- (5pkt) Znaleźć wszystkie pierwiastki zespolone wielomianu  $z^2 - 5z + (7+i) = 0$ .
- (5pkt) Znaleźć wszystkie pierwiastki zespolone stopnia 4 z liczby  $-1$ .

**ZADANIA DOMOWE seria 12**

termin oddania: 05.05.2011

Do zdobycia **50 punktów**. Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić ;)

- (5pkt) Znaleźć wszystkie pierwiastki zespolone stopnia 6 z liczby 64.
- (5pkt) Znaleźć wszystkie pierwiastki zespolone z 1 stopnia 8.
  - (5pkt) Znaleźć wszystkie pierwiastki zespolone z 1 stopnia 8, które nie są pierwiastkami z 1 stopnia mniejszego niż 8.
- Przedstawić następujące liczby zespolone w postaci  $a + bi$ :
  - (5pkt)  $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{19}$ ,
  - (5pkt)  $(i + \sqrt{3})^{55}$ .
- (10pkt) Niech  $n, m \in \mathbb{N}^*$  będą względnie pierwsze. Udowodnić, że jeśli  $a \in \mathbb{C}$  jest jednocześnie pierwiastkiem zespolonym  $m$ -go stopnia z 1 i pierwiastkiem zespolonym  $n$ -go stopnia z 1, to  $a = 1$ .
- Rozłożyć wielomian  $x^4 + 1$  na
  - (5pkt) iloczyn wielomianów liniowych o współczynnikach zespolonych.
  - (5pkt) iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż dwa.
- Rozłożyć wielomian  $x^6 - 1$  na
  - (5pkt) iloczyn wielomianów liniowych o współczynnikach zespolonych.
  - (5pkt) iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż dwa.