ZADANIA DOMOWE seria 1

termin oddania: 21.10.2010

Do zdobycia **50 punktów**. Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić ;)

1. (10pkt) Dany jest ciąg $a_n = \frac{n^2+11n+8}{2n+3}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Czy któryś z wyrazów tego ciągu jest równy 10?

2. (10pkt) Dany jest ciąg $a_n = \frac{n^4+2n^3+28n-5}{(n^2+n+1)^2}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Czy któryś z wyrazów tego ciągu jest równy 1?

3. (10pkt) Dane są dwie liczby rzeczywiste $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ dany jest równaniem rekurencyjnym
$$a_n = \frac{a_{n-1} + \ldots + a_0}{n} \qquad \text{dla } n \geq 2.$$
Zaleźć wzór na $n-$ty wyraz ciagu.

4. (10pkt) Wyznaczyć wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ dla których pierwiastki równania $x^3 - (m+3)x^2 - 4x = 0$ tworzą ciąg arytmetyczny.

5. (10pkt) Dana jest liczba $m \in \mathbb{N}$ i liczby **wymierne** $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$. Udowodnić, że istnieje ciąg arytmetyczny zawierający te liczby (**niekoniecznie** jako kolejne wyrazy ciągu!).
Czy założenie, że $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Q}$ jest potrzebne?

6. (10pkt) Dane są dwa ciągi geometryczne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dwie liczby całkowite $k.m \in \mathbb{Z}$ i liczba rzeczywista $a \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że ciąg $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dany wzorem $c_n = a \cdot (a_n)^k \cdot (b_n)^m$ dla $n \in \mathbb{N}$, też jest geometryczny.

ZADANIA DOMOWE seria 2

termin oddania: 21.10.2010

Do zdobycia **50 punktów**. Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić ;)

1. Które z następujących ciągów są (i) ograniczone z góry; (ii) ograniczone z dołu; (iii) ograniczone:
   (a) (4+4+2 pkt) $a+n = \frac{1-100n}{1+\sqrt{n}}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
   (b) (4+4+2 pkt) $b_= \frac{1+n^2}{1+2n^2}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
   (c) (4+4+2 pkt) $c_n = \frac{1+\sqrt[100]{n}}{1+\sqrt[99]{n}}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
   (d) (4+4+2 pkt) $d_n = \frac{n^3+4n^2+n-1}{n^4+n^3+2n^2-2n-1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

2. Które z następujących ciągów są (i) niemalejące; (ii) nierosnące:
   (a) (5+5 pkt) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ dla $n \geq 1$.
   (b) (5+5 pkt) $b_n = \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$ dla $n \geq 0$.

3. Wyznaczyć najmniejszy wyraz ciągu
   (a) (5pkt) $a_n = n^2 - 5n + 1$ dla $n \in \mathbb{N}$.
   (b) (5pkt) $b_n = (n^2 - n + 1)^2$ dla $n \in \mathbb{N}$.

4. Wyznaczyć największy wyraz ciągu
   (a) (5pkt) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
   (b) (5pkt) $b_n = \frac{1}{(2n-3)(2n-5)(2n-7)}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

5. (10pkt) Dany jest ciąg funkcji kwadratowych $f_n(x) = 6x^2 - nx + 2n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Znaleźć wzór na $n-$ty wyraz ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ najmniejszych wartości tych funkcji.