ZADANIA DO PODUSZKI

1. Udowodnić, że negacji nie można zdefiniować przy pomocy
   (a) alternatywy i implikacji.
   (b) koniunkcji i implikacji.

2. Podać przykład funkcji z $\mathbb{R}$ **na** przedział $(0;1)$ (tzn. przeciwdziedziną f jest cały przedział $(0;1)$).

3. Niech funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia następujące dwa warunki dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \leq x \quad \text{i} \quad f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

   Udowodnić, że f jest identycznością, tzn. $f(x) = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

4.* Punkt p leży we wnętrzu pewnego wielokąta wypukłego $a_1 a_2 \ldots a_n$. Udowodnić, że co najmniej dla jednego boku tego wielokąta (powiedzmy $a_k a_{k+1}$) jest prawdą, że prosta prostopadła do $a_k a_{k+1}$ i przechodząca przez p, przecina bok $a_k a_{k+1}$.
WSKAZÓWKA: skorzystać z zasady minimum, tzn. wziąć bok który "jest" najbliżej p.

5.* Na płaszczyźnie dany jest zbiór n punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że można wśród nich znaleźć trzy takie, że wyznaczony przez nie okrąg nie zawiera we wnętrzu innych punktów z tego zbioru.
WSKAZÓWKA: skorzystać z zasady minimum, tzn. wziąć okrąg o najmniejszej srednicy.

ZADANIA DOMOWE seria 9

Do zdobycia **40 punktów**.

1. (10pkt) Narysować wykres funkcji $f(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$. Znaleźć obrazy zbiorów $(-1;1)$ i $[-2;2)$, oraz przeciwobrazy zbiorów $(0;1]$ i $[-1;0]$.

2. (10pkt) Funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla } x \leq 1 \\ -x+1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$. Znaleźć obrazy zbiorów $[0;2]$ i $(\frac{1}{2};3)$ oraz przeciwobrazy $[1;3]$ i $[-1;0]$.

3. (10pkt) Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{dla } x \neq -1 \\ 1 & \text{dla } x = -1 \end{cases}$ Czy f jest różnowartościowa?

4. Niech $f\colon X \longrightarrow Y$ będzie dowolną funkcją. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq Y$,
   (a) (10pkt) $\overleftarrow{f}[A \cup B] = \overleftarrow{f}[A] \cup \overleftarrow{f}[B]$,
   (b) (10pkt) $\overleftarrow{f}[A \cap B] = \overleftarrow{f}[A] \cap \overleftarrow{f}[B]$.

5. (10pkt) Niech $f\colon X \longrightarrow Y$ będzie dowolną funkcją. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) Dla dowolnych zbior ow $A, B \subseteq X$, $\overrightarrow{f}[A \cap B] = \overrightarrow{f}[A] \cap \overrightarrow{f}[B]$.
   (b) f jest funkcją różnowartościową.