ZADANIA DO PODUSZKI

1. Korzystając z tożsamości $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ i $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$ znaleźć wzór na $1^2+2^2+\ldots+n^2$.
2. Korzystając z metody z zadnia 1 znaleźć wzór na
   (a) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$,
   (b) $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$.
3. Udowodnić, że za pomocą alternatywy ($\vee$) i koniunkcji ($\wedge$) nie można zdefiniować implikacji.
4. Udowodnić, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[a+b]{a^b b^a} \leq \frac{a+b}{2}$.
5. Udowodnić, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}^*$,
$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \right)^{a+b+c} \geq a^a b^b c^c.$$

ZADANIA DOMOWE seria 8

Do zdobycia **40 punktów**.

1. (10pkt) Niech $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ będą liczbami rzeczywistymi takimi, że
$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 1 = b_1^2 + \ldots + b_n^2.$$
   Udowodnić, że $|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \leq 1$.
2. (10pkt) Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x > 0$ i $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{x^n}{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}} \leq \frac{1}{2n+1}.$$
3. (10pkt) Naszkicować na płaszczyźnie $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zbiór $A = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon \min\{x, y\} \leq 0 \text{ i } \max\{x, y\} > 0\}$.
4. (10pkt) Udowodnić, że negacji nie można zdefiniować za pomocą alternatywy i koniunkcji.
5. (10pkt) Na dworze króla Artura zebrało się $2n$ rycerzy, przy czym żaden z nich nie ma więcej niż $n-1$ wrogów. Udowodnić, że moża tak posadzić rycerzy przy okrągłym stole, by żaden z nich nie siedział obok swojego wroga.