ZADANIA DO PODUSZKI

1. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c.$$

2. Udowodnić, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{2}{3}.$$

3. Niech $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ będą dodatnimi liczbami takimi, że $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Udowodnić, że

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n.$$

4. W zawodach tenisowych każdy gracz rozegrał jeden mecz z każdym z pozostałych zawodników. Udowodnić, że można tak ustawić wszystkich graczy w rząd, żeby żaden z nich nie przegrał meczu z graczem stojącym bezpośrednio za nim.

5. Udowodnić, że dowolny zbiór $n-$elementowy ma 2^n podzbiorów.

6. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, \ldots, a_n$,

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \ldots + \frac{n}{a_n}) \geq n^2.$$

ZADANIA DOMOWE seria 7

Do zdobycia **40 punktów**.

1. (10pkt) Udowodnić, że dla dowolnej $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. (10pkt) Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 4$, $2^n > n^2$.

3. (10pkt) Na płaszczyźnie danych jest $n \geq 1$ prostych z których każde dwie przecinają się, oraz żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt. Udowodnić, że proste te dzielą płaszczyznę na $\frac{n^2+n+2}{2}$ części.

4. (10pkt) Niech p_n oznacza $n-$tą liczbę pierwszą (np. $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \ldots$). Udowodnić, że dla dowolnego $n \geq 11$, $p_n > 3n$.

5. (10pkt) Udowodnić, że zbiór $\{\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots\}$ jest ograniczony z góry i z dołu.