ZADANIA DO PODUSZKI

1. Czy dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi równość $A \cup B = (A \div B) \div (A \cap B)$?

2. Korzystając z nierówności $<$, dodawania $+$ i mnożenia $\cdot$ liczb naturalnych, oraz spójników logicznych i kwatyfikatorów zapisać następujące zdania:

   (a) $n \in \mathbb{N}$ jest liczbą parzystą.

   (b) $n \in \mathbb{N}$ jest sumą kwadratów dwóch liczb naturalnych.

   (c) $n \in \mathbb{N}$ przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1 lub 2.

   (d) nie istnieje największa liczba pierwsza.

3. Napisać zaprzeczenie następującego zdania: *jeśli* 7 *jest liczbą dodatnią, to* -7 *jest liczbą ujemną.*

4. Rozstrzygnąć prawdziwość następujących zdań

   (a) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{m\in\mathbb{N}}\exists_{k\in\mathbb{N}} \quad n \leq k \leq m.$

   (b) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{m\in\mathbb{N}}\exists_{k\in\mathbb{N}} \quad n \leq m \Longrightarrow n \leq k \leq m.$

   (c) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{m\in\mathbb{N}}\exists_{k\in\mathbb{N}} \quad n \leq m \Longrightarrow n < k < m.$

   (d) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{m\in\mathbb{N}}\exists_{k\in\mathbb{N}} \quad (n \leq k \leq m) \vee (m \leq k \leq n).$

   (e) $\exists_{k\in\mathbb{N}}\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{m\in\mathbb{N}} \quad n \leq k \leq m.$

   (f) $\exists_{k\in\mathbb{N}}\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{m\in\mathbb{N}} \quad n \leq m \Longrightarrow n \leq k \leq m.$

ZADANIA DOMOWE

1. (10pkt) Znaleźć najkrótszą formułę równoważną z $\big((p \vee q) \wedge \neg p\big) \Longrightarrow q$.

2. (10pkt) Znaleźć formułę najkrótszej długości równoważną z $p \Longrightarrow \big(q \wedge \big(\neg p \iff q\big)\big)$, w której występuje tylko koniunkcja, alternatywa i negacja.

3. (10pkt) Korzystając z nierówności $<$, dodawania $+$ i mnożenia $\cdot$ liczb naturalnych, oraz spójników logicznych i kwatyfikatorów zapisać następujące zdanie (hipoteza Goldbacha): *każda liczba nieparzysta większa od 3 rozkłada się na sumę dwóch liczb pierwszych.*

4. (10pkt) Rozstrzygnąć czy następujące zdania są prawdziwe:

   (a) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{m\in\mathbb{N}} \quad (n < m) \vee (m < n)$?

   (b) $\exists_{n\in\mathbb{N}}\forall_{m\in\mathbb{N}} \quad (n < m) \vee (m < n)$?

5.* (15pkt) Udowodnić, że jeśli Ψ jest tautologią, to wyrażenie $\Phi_1 \Longrightarrow (\Phi_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow (\Phi_{2009}) \Longrightarrow \Psi \ldots)$ także jest tautologią.