ZADANIA DOMOWE   seria 13

Do zdobycia **30 punktów**.

1. (10pkt) Niech $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ będzie funkcją taką, że $f(\langle n, m\rangle) = 2^n \cdot 3^m$.
   (a) (4pkt) Czy f jest funkcją różnowartościową?
   (b) (3pkt) Czy f jest na zbiór $\mathbb{N}$?
   (c) (3pkt) Znaleźć $\overleftarrow{f}[\{18\}]$.

   Przypominam, że $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

2. (10pkt) Na ile sposobów można umieścić 9 ponumerowanych kul w 4 ponumerowanych komórkach tak, by
   (a) (5pkt) w pierwszej komórce była dokładnie jedna kula?
   (b) (5pkt) w pierwszej komórce była dokładnie jedna kula i w drugiej komórce były dokładnie dwie kule?

3. (10pkt) Udowodnić, że
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}^2 = n^2 \binom{2n-2}{n-1}$$

4. (10pkt) Ile jest permutacji zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ takich, że 0 i 1 stoją obok siebie?

ZADANIA DOMOWE   seria 14

termin oddania: 22.04.2010

Do zdobycia **40 punktów**.

1. Niech $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami liczbowymi. Sprawdzić które z następujących zdań są prawdziwe:
   (a) (5pkt) Jeśli f i g są rosnące, to złożenie $g \circ f$ jest funkcją rosnąca.
   (b) (5pkt) Jeśli f jest malejąca i g rosnąca, to złożenie $g \circ f$ jest funkcją malejącą.
   (c) (5pkt) Jeśli f jest rosnąca i g malejąca, to złożenie $g \circ f$ jest funkcją rosnącą.
   (d) (5pkt) Jeśli f jest parzysta, to złożenie $g \circ f$ jest funkcją parzystą.

2. (10pkt) Udowodnić, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją rosnącą, to funkcja g okresślona wzorem $g(x) = f(-x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, jest też funkcją malejącą.

3. (10pkt) Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą, a $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją malejącą. Udowodnić, że $f - g$ jest funkcją rosnącą (gdzie $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$).

4. Podać największe przedziały (lub półproste) na których funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = |x - 2| + |x + 2|$, jest
   (a) (5pkt) rosnąca.
   (b) (5pkt) niemalejąca.

ZADANIA DOMOWE seria 13

Do zdobycia **30 punktów**.

1. (10pkt) Niech $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ będzie funkcją taką, że $f(\langle n, m\rangle) = 2^n \cdot 3^m$.
   (a) (4pkt) Czy f jest funkcją różnowartościową?
   (b) (3pkt) Czy f jest na zbiór $\mathbb{N}$?
   (c) (3pkt) Znaleźć $\overleftarrow{f}[\{18\}]$.

   Przypominam, że $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

2. (10pkt) Na ile sposobów można umieścić 9 ponumerowanych kul w 4 ponumerowanych komórkach tak, by
   (a) (5pkt) w pierwszej komórce była dokładnie jedna kula?
   (b) (5pkt) w pierwszej komórce była dokładnie jedna kula i w drugiej komórce były dokładnie dwie kule?

3. (10pkt) Udowodnić, że
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}^2 = n^2 \binom{2n-2}{n-1}$$

4. (10pkt) Ile jest permutacji zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ takich, że 0 i 1 stoją obok siebie?

ZADANIA DOMOWE seria 14

termin oddania: 22.04.2010

Do zdobycia **40 punktów**.

1. Niech $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami liczbowymi. Sprawdzić które z następujących zdań są prawdziwe:
   (a) (5pkt) Jeśli f i g są rosnące, to złożenie $g \circ f$ jest funkcją rosnąca.
   (b) (5pkt) Jeśli f jest malejąca i g rosnąca, to złożenie $g \circ f$ jest funkcją malejącą.
   (c) (5pkt) Jeśli f jest rosnąca i g malejąca, to złożenie $g \circ f$ jest funkcją rosnącą.
   (d) (5pkt) Jeśli f jest parzysta, to złożenie $g \circ f$ jest funkcją parzystą.

2. (10pkt) Udowodnić, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją rosnącą, to funkcja g okresślona wzorem $g(x) = f(-x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, jest też funkcją malejącą.

3. (10pkt) Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą, a $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją malejącą. Udowodnić, że $f - g$ jest funkcją rosnącą (gdzie $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$).

4. Podać największe przedziały (lub półproste) na których funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = |x - 2| + |x + 2|$, jest
   (a) (5pkt) rosnąca.
   (b) (5pkt) niemalejąca.