

ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE

1. Znaleźć elementy i podzbiory następujących zbiorów

- (a) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
- (b) $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.
- (c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.
- (d) $\{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}$.

2. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne na to, by zbiory A, B spełniały następujący układ równości $\begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = B \end{cases}$.

3. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B, C ,

- (a) $A \cup (B \setminus C) = ((A \cup B) \setminus C) \cup (A \cap C)$.
- (b) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.
- (c) $A \setminus (B \setminus (C \setminus D)) = (A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus D)$.

4. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B, C ,

- (a) $A \div \emptyset = A$.
- (b) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$.
- (c) $A = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \div B = \emptyset$.

5. Dane są zbiory A, B, C . Znaleźć warunki konieczne i dostateczne na to, by zbiór X spełniał następujący układ równań

$$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$$

Jakie warunki muszą spełniać zbiory A, B, C by istniało rozwiązanie tego układu?

ZADANIA DOMOWE

1. (10pkt) Znaleźć warunki konieczne i dostateczne na to, by

- (a) $\{\{a, b\}, c\} = \{\{a\}, c\}$.
- (b) $\{\{a, b\}, \{d\}\} = \{\{a\}\}$.
- (c) $\{\{a, \emptyset\}, b\} = \{\{\emptyset\}\}$.

2. (10pkt) Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B, C ,

- (a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.
- (b) $(A \setminus B) \cup C = ((A \cup C) \setminus B) \cup (B \cap C)$.

3. (10pkt) Czy dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą równości

- (a) $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$?
- (b) $(A \cup B) \div C = (A \cup B) \div (A \cup C)$?

4. (10pkt) Jakie relacje inkluzji (tzn. zawierania) zachodzą pomiędzy zbiorami A, B, C (warunki konieczne i dostateczne), jeśli prawdziwa jest równość

- (a) $(A \cup B) \cap (C \cup B) = B$.
- (b) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.

5* (15pkt) Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi równość

$$A \div (B \div C) = (A \div B) \div C.$$

6* (15pkt) Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ i dowolnych zbiorów $A_1, \dots, A_n \subseteq X$,

$$A_1 \div A_2 \div \dots \div A_n = \{x \in X: |\{i \in \{1, 2, \dots, n\}: x \in A_i\}| \text{ jest liczbą nieparzystą}\},$$

gdzie \div oznacza różnicę symetryczną zbiorów, a $|B|$ oznacza ilość elementów skończonego zbioru B .

Uwaga: Z zadania poprzedniego wynika, że prawa strona równości jest poprawnie określona.