ZADANIA DO PODUSZKI

1. Dane są liczby całkowite $a, b, n \in \mathbb{Z}$ takie, że żadna z liczb $a, a+b, a+2b, \ldots, a+(n-1)b$ nie jest podzielna przez n. Pokazać, że b i n nie są względnie pierwsze.
2. W przestrzeni danych jest 9 różnych punktów $a_1, a_2, \ldots, a_9$ o współrzędnych całkowitych z których żadne trzy nie są wspóliniowe. Pokazać, że istnieją dwa różne punkty a_i, a_j $(i \neq j)$ takie, że odcinek $a_i a_j$ zawiera punkt o współrzędnych całkowitych (różny od a_i i a_j).
3. Na płaszczyznie danych jest 25 punktów takich, że sposród każdych trzech co najmniej 2 mają odległość mniejszą niż 1. Udowodnić, że co najmniej 13 z tych punktów leżą w kole o promieniu 1.
4. Niech a będzie dodatnią liczbą całkowitą niepodzielną przez 10. Pokazać, że istnieje wielokrotność a która ma same jedynki (w rozwinięciu dziesiętnym).
5. Mamy 20 parami różnych liczb całkowitych dodatnich mniejszych od 70. Udowodnić, że wśród wszytkich dodatnich różnic tych liczb są co najmniej cztery różne (tzn. istnieją cztery pary $\langle a_1, a_2\rangle$, $\langle b_1, b_2\rangle$, $\langle c_1, c_2\rangle$, $\langle d_1, d_2\rangle$ takie, że $a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2$ i oczywiście $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$, $c_1 > c_2$, $d_1 > d_2$).
6. Mamy n elementowy zbiór A dodatnich liczb całkowitych niepodzielnych przez liczbę $n \in \mathbb{N}^*$. Udowodnić, że istnieje podzbór A taki, że suma jego elementow jest podzielna przez n.
7. Pokazać, że w każdym wypukłym sześciokącie istnieje przekątna która odcina trójkąt o polu nie większym niż jedna szósta pola sešciokąta.
8. Spośród liczb $1, 2, \ldots, 2n$ wybrano $n+1$. Udowodnić, że wśród nich są dwie liczby względnie pierwsze.
9. Udowodnić, że spośród $2^k - 1$ dodatnich liczb całkowitych (gdzie $k \geq 1$) można wybrać 2^{k-1} liczb których suma jest podzelna przez 2^{k-1}.
10. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Udowodnić, że iloczyn $(b-a)(c-a)(d-a)(b-c)(d-c)(d-c)$ jest podzielny przez 12.
11. Udowodnić, że z dowolnych 52 liczb całkowitych dodatnich można wybrać dwie takie, że ich suma lub różnica jest podzielna przez 100.
12. W dowolnym wypukłym $2n-$kącie istnieje przekątna która nie jest równoległa do żadnego boku (przekątna, czyli odcinek łączący dwa wierzchołki które nie są sąsiednie).
13. Danych jest k liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takich, że $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < n$ i $k > (n+1)/2$. Udowodnić, że istnieje para a_r, a_s taka, że $a_1 + a_r = a_s$.
14. Udowodnić, że z 10 różnych liczb dwucyfrowych można wybrac takie dwa niepuste rozłączne zbiory, że sumy liczb z tych zbiorów są równe.
15. Dana jest liczba rzeczywista $a \in \mathbb{R}$ i liczba naturalna dodatnia $n \in \mathbb{N}$. Udowdnić, że jedna z liczb $a, 2a, \ldots, (n-1)a$ leży w odległości nie większej niż $\frac{1}{n}$ od jakiejś liczby całkowitej dodatniej.
16. Danych jest 10 odcinków o długości wiekszej niż 1 i mniejszej niż 55. Pokazać, że trzy z nich tworzą trójkąt.
17. Na prostej rzeczywistej danych jest 50 przedziałów domkniętych. Udowodnić, że co najmniej osiem z nich ma punkt wspólny lub co najmniej osiem z nich jest parami rozłacznych.