ZADANIA DO KOLOKWIUM

1. Na ile sposobów można rozmieścić k ponumerowanych kul w n ponumerowanych komórkach (od 1 do n) tak, by
   (a) dokładnie jedna komórka była zajęta?
   (b) dokładnie dwie komórki były zajęte?
   (c) dokładnie trzy komórki były zajęte?
   (d) w pierwszej komórce była co najmniej jedna kula?
   (e) w pierwszej komórce była co najmniej jedna kula i w drugiej komórce była co najmniej jedna kula?
   (f) w pierwszej komórce była co najmniej jedna kula i w drugiej komórce była co najmniej jedna kula i w trzeciej komórce była co najmniej jedna kula?

2. Na ile sposobów można rozmieścić 6 ponumerowanych kul w
   (a) 6
   (b) 5
   (c) 4

   ponumerowanych komórkach tak, by w każdej komórce była co najmniej jedna kula?

3. Na ile sposobów można rozmieścić $n+1$ ponumerowanych kul w
   (a) $n+1$
   (b) n

   ponumerowanych komórkach tak, by w każdej komórce była co najmniej jedna kula?

4. Na ile sposobów moża rozmieścić 19 ponumerowanych kul (od 1 do 19) w 13 ponumerowanych komórkach (od 1 do 13) tak, by
   (a) w pierwszej komórce była pierwsza kula (mogą być jeszcze inne)?
   (b) w pierwszej komórce była dokładnie jedna kula?
   (c) w pierwszej komórce była co najmniej jedna kula?
   (d) w pierwszej komórce była co najwyżej jedna kula?
   (e) w pierwszej komórce były dokładnie trzy kule i w drugiej komórce były dokładnie cztery kule?
   (f) w komórkach od 1 do 6 były po dokładnie dwie kule, a w pozostałych po jednej kuli?
   (g) w pierwszej komórce była co najmniej jedna kula i w drugiej komórce też co najmniej jedna kula?

5. Podać dowody kombinatorycze następujących tożsamości:
   (a) $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$
   (b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{m} \cdot \binom{k}{m} = \binom{n+1}{2m+1}$

6. Wyznaczyć liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, w których równanie $x + y = 2n + 1$ **nie** ma rozwiązań.

7. Ile jest wszystkich liczb siedmiocyfrowych o różnych cyfrach? Ile spośród nich jest podzielnych przez 9?

8. Z cyfr $1, 2, 3, \ldots, 9$ utworzono wszystkie możliwe liczby $2-$cyfrowe o różnych cyfrach. Oblicz sumę tych liczb.

9. Uporządkować od najmniejszej do największej liczby: $1999!$, $1! + 9! + 9! + 9!$, $1! \cdot 9! \cdot 9! \cdot 9!$, $19! \cdot 99!$, $(19^9)! + 9$, $(19!)^{99!}$, $1^{999}!$, $(19^{99})!$.

10. W kadrze piłkarskiej jest 16 zawodników. Każdą możliwość ponumerowania zawodników "drukujemy" na kartce o wymiarach $2cm \times 5cm \times 0,1mm$. Ile potrzeba hal o wymiarach $50m \times 50m \times 20m$, żeby pomieścić wszystkie wydruki?

11. Ile jest dwuelementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2n + 1\}$ takich, że
    (a) suma wybranych liczb jest parzysta?

(b) różnica wybranych liczb jest parzysta?

(c) iloczyn wybranych liczb jest parzysty?

12. Niech $f\colon \{1, 2, 3, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ będzie funkcją, $k \leq n$ i $A = \overrightarrow{f}[\{1, 2, 3, \ldots, k\}]$. Ile jest wszystkich funkcji f takich, że

    (a) $|A| = 1$?

    (b) $|A| = k$?

    (c) $|A| \leq k$?

    (d) $|A| = 2$?

    (e) $|A| = 3$?

    (f) f jest funkcją ściśle rosnącą (tzn. $f(1) < f(2) < \ldots < f(k)$)?

13. Czy wśród liczb $1, 2, 3, \ldots, 10^n$ więcej jest tych, w których zapisie dziesiętnym występuje jedynka na którymś miejscu, czy też tych, które zapisujemy bez użycia jedynki? Przeanalizować przypadki: $n = 8$, $n = 9$, $n = 10$.

14. Na ile sposobów można wybrać k pól z szachownicy $n \times n$ tak, by żadne dwa z wybranych pól nie leżały ani w jednej kolumnie, ani w jednym wierszu?

15. Ile jest permutacji zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ takich, że liczby 1 i 2 występują jedna obok drugiej?

16. Dany jest wielokąt, którego wierzchołki leżą na okręgu i w którym żadne trzy przekątne nie wychodzące z jednego wierzchołka nie mają punktu wspólnego. Na ile części dzielą płaszczyznę boki i przekątne tego wielokąta?

17. Iloma kolorami można pomalować ściany sześcianu sześcioma danymi kolorami, jeśli za różne uważamy te sposoby, które nie dadzą się otrzymać (jeden z drugiego) przez obrót sześcianu? Zakładamy tu, że kolory są różne i że każda ściana jest pomalowana jednym kolorem (oczywiście nie każdy kolor musi być użyty).

18. Na ile sposobów można daną liczbę naturalna n przedstawić w postaci sumy k liczb naturalnych? Przedstawienia różniące się kolejnością składników uważamy za różne.