

Zadania do kolokwium 5

1. Rozwiązać równanie $|3x + 5y - 4| + |7x - 7y| = 0$.
2. Rozwiązać równanie $(2x + y - 4)^2 + (x - 2y - 7)^2 = 0$.
3. Podać przykład funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz bioró $A, B \subseteq \mathbb{R}$ takich, że f jest ściśle rosnąca na A i f jest ściśle rosnąca na B , ale f nie jest ściśle rosnąca na $A \cup B$.
4. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją i $a \neq b$ liczbami. Udowodnić, że jeśli $f(a) = b$ i $f(b) = a$, to f nie jest ściśle rosnąca.
5. Udowodnić, że jeśli funkcje $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są dodatnie i ściśle rosnące, to ich iloczyn $f \cdot g$ też jest ściśle rosnąca. Czy założenie, że funkcje są dodatnie jest potrzebne? (funkcja f jest dodatnia, jeśli $f(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$).
6. Niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ściśle malejącymi. Udowodnić, że ich suma $f + g$ też jest funkcją ściśle malejącą.
7. Dane są funkcje $f(x) = 3x^2 + x - 7$ i $g(x) = -x + 5$. Znaleźć $f \circ g$ i $g \circ f$.
8. Rozwiązać równanie $3|x^2 - 6x + 7| = 5x - 9$.
9. Rozwiązać równanie $|x^2 - x + 1| - |x^2 + x + 1| = 6$.
10. Rozwiązać równanie $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.
11. Rozwiązać równanie $\frac{4}{\sqrt[3]{x+2}} + \frac{\sqrt[3]{x+3}}{5} = 2$.
12. Dla jakiej liczby rzeczywistej m suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 + (m-2)x - (m+3) = 0$ ma najmniejszą wartość?
13. dla jakich liczb całkowitych k pierwiastki równania $kx^2 - (1-2k)x + k - 2 = 0$ są wymierne?
14. Dla jakich liczb rzeczywistych m suma pierwiastków równania $x^2 - mx + m(m+3) = 0$ jest o 3 mniejsza od ich iloczynu?
15. Rozwiązać równanie $x^2 - 5 + \sqrt{x^2 - 6} = 7$.
16. Udowodnić, że prosta może przecinać parabolę w 0,1,2 punktach, ale nie może przwecinać paraboli w większej liczbie punktów.
17. Rozwiązać nierówność $|\frac{x^2+3x+1}{x^2+4x+1}| > 1$.
18. Podprzykład wielomianu o współczynnikach niecałkowitych, przyjmującego wartości całkowite w punktach całkowitych.
19. Udowodnić, że jeśli wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartości nieparzyste w dwóch kolejnych liczbach całkowitych, to nie ma pierwiastków całkowitych.
20. Znaleźć $NWD(3x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 2, x^2 + x + 1)$.
21. Znaleźć $NWD(x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12, x^3 + 3x^2 - x - 2)$.
22. Znaleźć sumę współczynników wielomianu $(1 - 3x + 2x^2)^{743}(1 + 3x - 2x^2)^{744}$
23. Znaleźć iloraz i resztę z dzielenia $x^{33} + x - 8$ przez $x^{16} - 4$.
24. Znaleźć iloraz i resztę z dzielenia $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 2$ przez $x^2 + x + 1$.
25. Udowodnić, że jeśli wielomian o współczynnikach wymiernych dzieli się przez $x - \sqrt{2}$, to dzieli się przez $x^2 - 2$.
26. Po kazać, że wielomian $(x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$ jest podzielny przez $x^2 - 3x + 2$.
27. Znaleźć resztę z dzielenia $(x^2 - x - 1)^{2010}$ przez $x^2 - 1$.
28. Znaleźć resztę z dzielenia $x^{2010} + 1$ przez $x^2 - 2$.
29. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} x^2 - yz = 3 \\ y^2 - zx = 4 \\ z^2 - xy = 5 \end{cases}$$

30. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ xy = 27 \end{cases}$

31. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 1/x + 1/y + 1/z = 1 \\ xy + yz + zx = 27 \end{cases}$