**GAL, Kolokwium 2, 12.05.2009**

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE) i numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza,
numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT **A**

(1) (a) W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ znaleźć parametryzację i równanie płaszczyzny $P$ przechodzącej przez punkt $(1,-3,2)$ i równoległej do płaszczyzny $H = \mathrm{af}((0,1,1),(1,3,1),(1,1,3))$.

(b) Czy prosta $L = \mathrm{af}((2,-4,0),(1,-3,2))$ przecina płaszczyznę $H = \mathrm{af}((0,1,1),(1,3,1),(1,1,3))$? Jeśli tak, znaleźć ich część wspólną $H \cap L$.

(2) Dane są następujące punkty w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$:

$$p_0 = (1,1,1), \quad p_1 = (2,2,1), \quad p_2 = (2,2,2), \quad p_3 = (1,2,1),$$

$$q_0 = (-1,0,1), \quad q_1 = (1,0,2), \quad q_2 = (-1,-2,2), \quad q_3 = (3,2,2).$$

(a) Pokazać, że $p_0, p_1, p_2, p_3$ tworzą bazę punktową $\mathbb{R}^3$.

(b) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jest przekształceniem afinicznym takim, że $\varphi(p_i) = q_i$ dla $i = 0,1,2,3$. Znaleźć wzór na $\varphi$.

(c) Przekształcenie afiniczne $\psi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem $\psi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1+x_3+1, -x_1+x_2-1, x_2+x_3-2)$. Znaleźć układ równań opisujący podprzestrzeń afiniczną $\psi(M)$, gdzie $M = (0,2,1) + lin((1,1,1),(0,0,1))$.

(3) Dana jest przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym (tzn. $\langle (x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$) i podprzestrzeń $W = lin((0,1,-1,1),(1,0,2,0),(2,1,3,1))$.

(a) Znaleźć bazę przestrzeni $W^{\perp}$.

(b) Znaleźć bazę ortogonalną (tzn. prostopadłą) przestrzeni $W$.

(c) Znaleźć rzut wektora $(0,1,1,0)$ na $W$.

(4) $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ jest przestrzenią euklidesową liniową, $\emptyset \neq X \subseteq V$ dowolny niepusty zbiór, oraz $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ niezerowe wektory. Pokazać, że

(a) $X^{\perp} = \{v \in V \colon \langle v, x\rangle = 0 \quad \forall_{x\in X}\}$ jest podprzestrzenią liniową $V$,

(b) jeśli $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ dla każdych $i \neq j$, to $v_1, v_2, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne.

(5) Niech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową, a $W$ jej podprzestrzenią.

(a) Pokazać, że dla dowolnego wektora $v \in V$,

(a.1) $||\overline{v}|| \leq ||v||$,

(a.2) $||\overline{v}|| = ||v||$ wtedy i tylko wtedy gdy $v \in W$,

gdzie $\overline{v}$ jest rzutem wektora $v$ na podprzestrzeń $W$. ($||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$).

(b) Niech $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ będzie symetryczną macierzą $2\times 2$ spełniającą warunki kryterium Sylvestera (tzn. $a > 0$ i $\det A > 0$). Pokazać, że istnieją wektory $v, w \in V$, takie że $G(v,w) = A$ (gdzie $G(v,w)$ jest macierzą Grama wektorów $v$ i $w$).

**GAL, Kolokwium 2, 12.05.2009**

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE) i numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza,
numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT **B**

(1) (a) W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ znaleźć parametryzację i równanie płaszczyzny $P$ przechodzącej przez punkt $(1, 2, 1)$ i równoległej do płaszczyzny $H = \mathrm{af}((1, 1, 1), (-1, -1, 1), (2, 1, 2))$.

(b) Czy prosta $L = \mathrm{af}((-1, 1, 4), (0, 2, 3))$ przecina płaszczyznę $H = \mathrm{af}((1, 1, 1), (-1, -1, 1), (2, 1, 2))$? Jeśli tak znaleźć $H \cap L$.

(2) Dane są następujące punkty w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$:

$$p_0 = (1, 1, 1), \quad p_1 = (2, 2, 1), \quad p_2 = (1, 0, 1), \quad p_3 = (1, 2, 2),$$

$$q_0 = (-1, 0, 1), \quad q_1 = (1, 0, 2), \quad q_2 = (-1, -2, 2), \quad q_3 = (3, 2, 2).$$

(a) Pokazać, że $p_0, p_1, p_2, p_3$ tworzą bazę punktową $\mathbb{R}^3$.

(b) $\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jest przekształceniem afinicznym takim, że $\varphi(p_i) = q_i$ dla $i = 0, 1, 2, 3$. Znaleźć wzór na $\varphi$.

(c) Przekształcenie afiniczne $\psi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem $\psi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_3, -x_1 + x_2 - 1, x_2 + x_3 - 2)$. Znaleźć układ równań opisujący podprzestrzeń afiniczną $\psi(M)$, gdzie $M = (1, 2, 1) + lin((1, -1, -1), (0, 1, 0))$.

(3) Dana jest przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym (tzn. $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + xc_4y_4$) i podrzestrzeń $W = lin((0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 2), (2, 1, 1, 5))$.

(a) Znaleźć bazę przestrzeni $W^\perp$.

(b) Znaleźć bazę ortogonalną (tzn. prostopałą) przestrzeni $W$

(c) Znaleźć rzut wektora $(0, -1, 0, 1)$ na $W$.

(4) $(V, \langle \ , \rangle)$ jest przestrzenią euklidesową liniową, $\emptyset \neq X \subseteq V$ dowolny niepusty zbiór, oraz $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ niezerowe wektory. Pokazać, że

(a) $X^\perp = \{v \in V : \langle v, x \rangle = 0 \quad \forall_{x \in X}\}$ jest podprzestrzenią liniową $V$,

(b) jeśli $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ dla każdych $i \neq j$, to $v_1, v_2, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne.

(5) Niech $(V, \langle \ , \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową, a $W$ jej podprzestrzenią.

(a) Pokazać, że dla dowolnego wektora $v \in V$,

(a.1) $||\overline{v}|| \leq ||v||$,

(a.2) $||\overline{v}|| = ||v||$ wtedy i tylko wtedy gdy $v \in W$,

gdzie $\overline{v}$ jest rzutem wektora $v$ na podprzestrzeń $W$. ($||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$).

(b) Niech $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ będzie symetryczną macierzą $2 \times 2$ spełniającą warunki kryterium Sylvestera (tzn. $a > 0$ i $\det A > 0$). Pokazać, że istnieją wektory $v, w \in V$, takie że $G(v, w) = A$ (gdzie $G(v, w)$ jest macierzą Grama wektorów $v$ i $w$).