

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).

Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE) i numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT A

(1) Niech $A_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (gdzie $x \in \mathbb{R}$) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

- (a) Obliczyć $\det(A_x^5 \cdot B^{-1})$ w zależności od parametru $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Niech $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $M(\varphi)_{St}^{St} = A_1$ (gdzie St jest bazą standardową w \mathbb{R}^4). Pokazać, że φ jest izomorfizmem i znaleźć wzór na φ^{-1} .
- (c) Niech $\psi_x: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $M(\psi_x)_{St}^{St} = A_x \cdot B$. Dla jakich wartości parametru $x \in \mathbb{R}$, ψ_x nie jest monomorfizmem.

(2) Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem takim, że $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 - x_3, -x_2, -x_1 - x_2)$.

- (a) Znaleźć wartości własne φ oraz bazy odpowiadających im przestrzeni własnych. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak podać przykład bazy przestrzeni \mathbb{R}^3 w której φ ma macierz diagonalną.

(b) Czy istnieje baza \mathcal{B} w \mathbb{R}^3 taka, że $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Odpowiedź należy uzasadnić.

(c) Czy istnieje baza \mathcal{C} w \mathbb{R}^3 taka, że $M(\varphi)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Odpowiedź należy uzasadnić.

(3) $\mathcal{A} : (1, 1, 3), (1, -2, 1), (-2, -2, 1)$ i $\mathcal{B} : (1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)$ bazy przestrzeni \mathbb{R}^3 . Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Niech $f_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem liniowym takim, że $f_t((x_1, x_2, x_3)) = (1 - t)x_1 + tx_2$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

- (a) Znaleźć wzory na funkcjonały z bazy sprzężonej \mathcal{B}^* , oraz współrzędne funkcjonału f_{-1} w bazie \mathcal{B}^* .
- (b) Znaleźć bazę $\ker(\varphi^*)$ (funkcjonały otrzymanej bazy podać wzorami).
- (c) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, funkcjonał f_t należy do $im(\varphi^*)$.

(4) V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K , $\varphi: V \rightarrow V$ endomorfizmem przestrzeni V .

(a) Niech v_1, \dots, v_n będzie bazą V . Dla $i = 1, 2, \dots, n$, niech $f_i: V \rightarrow K$ będzie funkcjonałem liniowym takim, że $f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$. Udowodnić, że f_1, f_2, \dots, f_n są liniowo niezależne w przestrzeni sprzężonej V^* .

(b) Niech u_1, u_2, \dots, u_k będą wektorami własnymi endomorfizmu φ o wartościach własnych a_1, a_2, \dots, a_k . Pokazać, że jeśli a_1, a_2, \dots, a_k są parami różne (tzn. $a_i \neq a_j$ dla $i \neq j$), to wektory u_1, u_2, \dots, u_k są liniowo niezależne.

(5) (a) Pokazać, że jeśli V jest dwuwymiarową przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych \mathbb{R} , to dla dowolnego endomorfizmu $\varphi: V \rightarrow V$ którego ślad jest równy zero (tzn. $tr(\varphi) = 0$), istnieje baza \mathcal{A} przestrzeni V taka, że macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma postać $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ (tzn. macierz ma zerową przekątną).

(b) Udowodnić, że punkt (a) jest prawdziwy również dla przestrzeni dowolnego skończonego wymiaru, tzn. dla dowolnej skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad \mathbb{R} i dowolnego endomorfizmu $\varphi: V \rightarrow V$ takiego, że $tr(\varphi) = 0$, istnieje baza \mathcal{A} przestrzeni V w której macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma zerową przekątną.

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).

Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE) i numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT B

(1) Niech $A_x = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (gdzie $x \in \mathbb{R}$), $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

- (a) Obliczyć $\det(A_x^5 \cdot B^{-1})$ w zależności od parametru $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Niech $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $M(\varphi)_{S_t}^{S_t} = A_2$. Pokazać, że φ jest izomorfizmem i znaleźć wzór na φ^{-1} .
- (c) Niech $\psi_x: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $M(\psi_x)_{S_t}^{S_t} = A_x \cdot B$. Dla jakich wartości parametru $x \in \mathbb{R}$, ψ_x nie jest monomorfizmem.

(2) Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem takim, że $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (-x_2 + x_3, x_2, x_1 + x_2)$.

- (a) Znaleźć wartości własne φ oraz bazy odpowiadających im przestrzeni własnych. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak podać przykład bazy przestrzeni \mathbb{R}^3 w której φ ma macierz diagonalną.

(b) Czy istnieje baza \mathcal{B} w \mathbb{R}^3 taka, że $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Odpowiedź należy uzasadnić.

(c) Czy istnieje baza \mathcal{C} w \mathbb{R}^3 taka, że $M(\varphi)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Odpowiedź należy uzasadnić.

(3) $\mathcal{A} : (3, 1, 1), (1, -2, 1), (1, -2, -2)$ i $\mathcal{B} : (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$ bazy przestrzeni \mathbb{R}^3 . Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Niech $f_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem liniowym takim, że $f_t((x_1, x_2, x_3)) = tx_2 + (1-t)x_3$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

- (a) Znaleźć wzory na funkcjonały z bazy sprzężonej \mathcal{B}^* , oraz współrzędne funkcjonału f_3 w bazie \mathcal{B}^* .
- (b) Znaleźć bazę $\ker(\varphi^*)$ (funkcjonały otrzymanej bazy podać wzorami).
- (c) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, funkcjonał f_t należy do $im(\varphi^*)$.

(4) V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K , $\varphi: V \rightarrow V$ endomorfizmem przestrzeni V .

(a) Niech v_1, \dots, v_n będzie bazą V . Dla $i = 1, 2, \dots, n$, niech $f_i: V \rightarrow K$ będzie funkcjonałem liniowym takim, że $f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$. Udowodnić, że f_1, f_2, \dots, f_n są liniowo niezależne w przestrzeni sprzężonej V^* .

(b) Niech u_1, u_2, \dots, u_k będą wektorami własnymi endomorfizmu φ o wartościach własnych a_1, a_2, \dots, a_k . Pokazać, że jeśli a_1, a_2, \dots, a_k są parami różne (tzn. $a_i \neq a_j$ dla $i \neq j$), to wektory u_1, u_2, \dots, u_k są liniowo niezależne.

(5) (a) Pokazać, że jeśli V jest dwuwymiarową przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych \mathbb{R} , to dla dowolnego endomorfizmu $\varphi: V \rightarrow V$ którego ślad jest równy zero (tzn. $tr(\varphi) = 0$), istnieje baza \mathcal{A} przestrzeni V taka, że macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma postać $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ (tzn. macierz ma zerową przekątną).

(b) Udowodnić, że punkt (a) jest prawdziwy również dla przestrzeni dowolnego skończonego wymiaru, tzn. dla dowolnej skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad \mathbb{R} i dowolnego endomorfizmu $\varphi: V \rightarrow V$ takiego, że $tr(\varphi) = 0$, istnieje baza \mathcal{A} przestrzeni V w której macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma zerową przekątną.