GAL, Kolokwium 2, 22.01.2009

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE) i numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza,
numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT **A**

(1) Dla dowolnych parametrów $s, t \in \mathbb{R}$ niech W_{st} będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^4$ opisaną następującym układem równań:

$$\begin{cases} x_1 & +5x_2 & +(t+1)x_3 & +(s-3)x_4 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & +tx_3 & -x_4 & = 0 \end{cases}$$

i niech $V = lin((1,-1,-1,-2),(-2,1,3,3),(1,2,-4,1)) \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Sprawdzić, że V można opisać jednorodnym układem dwóch równań liniowych i znaleźć taki układ.

(b) Znaleźć wymiar przestrzeni $V + W_{st}$ w zależności od parametrów s i t.

(2) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie rzutem na V_1 wzdłuż V_2, gdzie $V_1 = lin((1,0,-1,-1),(0,1,1,2)) \subseteq \mathbb{R}^4$, $V_2 = lin((-1,1,1,0),(1,0,0,1)) \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Znaleźć wzór na φ oraz jego macierz w bazie standardowej.

(b) Podać przykłady (podając wzory) przekształceń liniowych $\psi_1, \psi_2\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ takich, że

(b.1) $dim(im\psi_1) = 1$ oraz $\varphi \circ \psi_1$ jest przekształceniem zerowym (tzn. $\varphi \circ \psi_1(v) = (0,0,0,0)$ dla dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^4$).

(b.2) $dim(im\psi_2) = 2$ i rząd przekształcenia $\varphi \circ \psi_2$ jest równy 1 (tzn. $dim(im(\varphi \circ \psi_2)) = 1$).

(3) Niech $\mathcal{A} : (2,1,2),(1,1,0),(-2,-2,1)$ i $\mathcal{B} : (1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)$ będą dwiema bazami przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $\psi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będą przekształceniami liniowymi takimi, że

$$M(\varphi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{S}t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(\psi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathcal{S}t$ jest bazą standardową w $\mathbb{R}^3$.

(a) Znaleźć współrzędne wektora $\varphi((2,-1,2))$ w bazie $\mathcal{A}$.

(b) Znaleźć wzór na $\psi \circ \varphi$.

(c) Znaleźć bazy $ker(\psi)$ i $im(\psi)$.

(4) Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $\varphi\colon V \longrightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym.

(a) Pokazać, że $ker(\varphi)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V, a $im\varphi$ jest podprzestrzenią W.

(b) Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

(b.1) istnieje taka baza $v_1, v_2, \ldots, v_n$ przestrzeni V, że $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_n)$ jest bazą przestrzeni W.

(b.2) dla każdej bazy $u_1, u_2, \ldots, u_n$ przestrzeni V, $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$ jest bazą przestrzeni W.

(5) Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ i niech $\varphi\colon V \longrightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $\varphi^3 = \varphi$.

(a) Pokazać, że $V = ker\varphi \oplus im\varphi$.

(b) Udowodnić, że istnieje baza $\mathcal{A} : v_1, v_2, \ldots, v_n$ przestrzeni V, w której macierz $M(\varphi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$ ma postać

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 0, 1\}$.

GAL, Kolokwium 2, 22.01.2009

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE) i numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza,
numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT **B**

(1) Dla dowolnych parametrów $s, t \in \mathbb{R}$ niech W_{st} będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^4$ opisanaą następującym układem równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (s+1)x_3 + (t+1)x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + sx_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

i niech $V = lin((1,1,-1,-2),(2,3,-1,-5),(1,3,1,-4)) \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Sprawdzić, że V można opisać jednorodnym układem dwóch równań liniowych i znaleźć taki układ.

(b) Znaleźć wymiar przestrzeni $V + W_{st}$ w zależności od s i t.

(2) Niech $\varphi: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie rzutem na V_1 wzdłuż V_2, gdzie $V_1 = lin((1,0,-1,-1),(-1,1,1,0)) \subseteq \mathbb{R}^4$, $V_2 = lin((0,1,1,2),(1,0,0,1)) \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Znaleźć wzór na φ oraz jego macierz w bazie standardowej.

(b) Podać przykłady (podając wzory) przekształceń liniowych $\psi_1, \psi_2: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ takich, że

(b.1) $dim(im\psi_1) = 1$ oraz $\varphi \circ \psi_1$ jest przekształceniem zerowym (tzn. $\varphi \circ \psi_1(v) = (0,0,0,0)$ dla dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^4$).

(b.2) $dim(im\psi_2) = 2$ i rząd przekształcenia $\varphi \circ \psi_2$ jest równy 1 (tzn. $dim(im(\varphi \circ \psi_2)) = 1$).

(3) Niech $\mathcal{A} : (2,1,2),(1,1,0),(-2,-2,1)$ i $\mathcal{B} : (1,1,1,),(1,1,0),(1,0,1)$ będą dwiema bazami przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $\psi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będą przekształceniami liniowymi takimi, że

$$M(\varphi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{S}t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(\psi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathcal{S}t$ jest bazą standardową w $\mathbb{R}^3$.

(a) Znaleźć współrzędne wektora $\varphi((2,2,-1))$ w bazie $\mathcal{A}$.

(b) Znaleźć wzór na $\psi \circ \varphi$.

(c) Znaleźć bazy $ker(\psi)$ i $im(\psi)$.

(4) Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $\varphi: V \longrightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym.

(a) Pokazać, że $ker(\varphi)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V, a $im\varphi$ jest podprzestrzenią W.

(b) Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

(b.1) istnieje taka baza $v_1, v_2, \ldots, v_n$ przestrzeni V, że $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_n)$ jest bazą przestrzeni W.

(b.2) dla każdej bazy $u_1, u_2, \ldots, u_n$ przestrzeni V, $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$ jest bazą przestrzeni W.

(5) Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ i niech $\varphi: V \longrightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $\varphi^3 = \varphi$.

(a) Pokazać, że $V = ker\varphi \oplus im\varphi$.

(b) Udowodnić, że istnieje baza $\mathcal{A} : v_1, v_2, \ldots, v_n$ przestrzeni V, w której macierz $M(\varphi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$ ma postać

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 0, 1\}$.