

GAL, Kolokwium 1, 04.12.2008

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko i numer indeksu osoby zdającej (BARDZO CZYTELNICIE), nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT A

- (1) Na płaszczyźnie zespolonej naszkicować zbiór

$$D = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(-iz^3 + i) > 0\}.$$

Dla jakich wartości $1 \leq k \leq 8$, $(-1 + i)^k \in D$.

- (2) Niech U będzie następującym układem równań liniowych

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + sx_2 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + tx_4 = -1. \end{cases}$$

- (a) Rozwiązać układ równań U dla $s = 2$ i $t = 5$.
- (b) Znaleźć wszystkie wartości parametrów s i t dla których układ równań U jest sprzeczny.
- (3) Niech $V = \operatorname{lin}((1, 2, -1, 3), (1, 1, 1, 1), (-1, 0, -3, 1), (1, 3, -3, 4+s)) \subseteq \mathbb{R}^4$.
- (a) Znaleźć wymiar przestrzeni V w zależności od parametru $s \in \mathbb{R}$.
- (b) Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ wektory $w_1 = (1, 2, 1, 2)$, $w_2 = (-1, -1, 0, 1)$ można uzupełnić do bazy \mathbb{R}^4 wektorami należącymi do przestrzeni V , podać przykład takich wektorów $v_1, v_2 \in V$.
- (c) znaleźć współrzędne wektora $(-5, -7, -2, -1)$ w znalezionej bazie w_1, w_2, v_1, v_2 .
- (4) Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
- (a) Wektory v_1, \dots, v_n są liniowo niezależne i rozpinają przestrzeń V .
- (b) Dla każdego wektora $v \in V$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ taki, że $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$.
- (5) Niech U i W będą skończone wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V (nad ciałem K) takimi, że

$$\dim(U + W) = \dim(U \cap W) + 1.$$

Udowodnić, że $U \subseteq W$ lub $W \subseteq U$.

GAL, Kolokwium 1, 04.12.2008

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko i numer indeksu osoby zdającej (BARDZO CZYTELNICIE), nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT B

- (1) Na płaszczyźnie zespolonej naszkicować zbiór

$$D = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im}(iz^3 - 1) > 0\}.$$

Dla jakich liczb naturalnych $1 \leq k \leq 8$, $(1 - i)^k \in D$.

- (2) Niech U będzie następującym układem równań liniowych

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + tx_2 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + sx_4 = 0. \end{cases}$$

- (a) Rozwiązać układ równań U dla $s = 3$ i $t = 1$.
(b) Znaleźć wszystkie wartości parametrów s i t dla których układ równań U jest sprzeczny.
- (3) Niech $V = \operatorname{lin}((1, 3, -1, 2), (1, 2, 1, 0), (-1, -1, -3, 2), (2, 5, 0, s)) \subseteq \mathbb{R}^4$.
- (a) Znaleźć wymiar przestrzeni V w zależności od parametru $s \in \mathbb{R}$.
(b) Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ wektory $w_1 = (1, 2, 1, 2)$, $w_2 = (1, 1, 0, -1)$ można uzupełnić do bazy \mathbb{R}^4 wektorami należącymi do V , podać przykład takich wektorów $v_1, v_2 \in V$.
(c) znaleźć współrzędne wektora $(1, 4, 3, 8)$ w znalezionej bazie w_1, w_2, v_1, v_2 .
- (4) Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
- (a) Wektory v_1, \dots, v_n są liniowo niezależne i rozpinają przestrzeń V .
(b) Dla każdego wektora $v \in V$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ taki, że $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$.
- (5) Niech U i W będą skończone wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V (nad ciałem K) takimi, że

$$\dim(U + W) = \dim(U \cap W) + 1.$$

Udowodnić, że $U \subseteq W$ lub $W \subseteq U$.