Twierdzenie o separatorze w grafach planarnych
notatki do ćwiczeń (z o. o.)

Łukasz Kowalik
kowalik@mimuw.edu.pl

7 maja 2002

Twierdzenie o separatorze zostało udowodnione przez Liptona i Tarjana w 1977 roku i wygląda tak:

Twierdzenie 1 (Twierdzenie o separatorze w grafie planarnym). *Niech $G = (V, E)$ będzie nieskierowanym grafem planarnym. Istnieje podział zbioru wierzchołków na trzy rozłączne zbiory $V = A \dot\cup B \dot\cup S$ taki, że*

(i) $|A|, |B| \leqslant \frac{2}{3}n$

(ii) $|S| \leqslant 4\sqrt{|V|}$

(iii) Dla dowolnych $a \in A$, $b \in B$ $\;a - b \notin E$, (S separuje A od B).

Istnieje także algorytm znajdujący taki podział w czasie liniowym.

Powyższe twierdzenie ma ogromne znaczenie w algorytmice. Pozwala konstruować algorytmy działające na grafach planarnych korzystające z metody *dziel i zwyciężaj*. Istotne jest to, że twierdzenie gwarantuje, że zbiory A i B są *duże* ($\geqslant \frac{1}{3}n - |S|$). Dzięki temu głębokość rekursji będzie zawsze $O(\log n)$. Fakt, że separator jest małego rozmiaru daje nadzieję, że uda się szybko scalać częściowe rozwiązania.

Algorytm podziału będzie wynikał z dowodu (wzbogacimy go trochę o uwagi „algorytmiczne").

Dowód. Załóżmy, że G jest spójny i weźmy dowolne włożenie G w płaszczyznę (rysunek bez przecięć). Możemy takie włożenie skonstruować, np. algorytmem Hopcrofta-Tarjana.

Niech s będzie dow. wierzchołkiem. Podzielmy G na wartstwy (BFS-em) tak, że warstwa $L(i)$ zawiera wierzchołki odległe od s o i. Dodajmy ostatnią, sztuczną warstwę o numerze $t_{max} + 1$. Zauważmy, że dla dowolnego $i = 1..t_{max} - 1$ zbiór $L(i)$ jest separatorem.

Niech t_1 będzie pierwszą wartwą taką, że $\bigcup\limits_{t \leqslant t_1} L(t) \geqslant \frac{n}{2}$. Wtedy:

$$|\bigcup_{t<t_1} L(t)| < n/2 \quad \text{oraz} \quad |\bigcup_{t>t_1} L(t)| < n/2$$

Jeśli $|L(t_1) \leqslant 4\sqrt{n}$, to bierzemy $S = L(t_1)$. Możemy więc założyć, że $|L(t_1) > 4\sqrt{n}$.

Niech $L(t_0)$ i $L(t_2)$ będą najmniej odległymi od t_1 warstwami, z których każda ma nie więcej niż $\sqrt{n}$ wierzchołków oraz $t_0 < t_1 < t_2$. Takie warstwy muszą istnieć (w najgorszym przypadku $t_0 = 0$ albo $t_2 = t_{max} + 1$). Zauważmy, że pomiędzy t_0 a t_2 musi być mniej niż $\sqrt{n}$ warstw, bo każda z nich ma więcej niż $\sqrt{n}$ wierzchołków. Niech teraz:

$$C = \bigcup_{t<t_0} L(t)$$

$$D = \bigcup_{t_0 < t < t_2} L(t)$$

$$E = \bigcup_{t > t_2} L(t)$$

Zauażmy, że $|C| < \frac{n}{2}$ oraz $|E| < \frac{n}{2}$. Jeśli $|D| \leqslant \frac{2}{3}n$, to jesteśmy w domu: jako A bierzemy największy ze zbiorów C, D, E, notamiast jako B sumę pozostałych. Separatorem jest $S = L(t_0) \cup L(t_2)$.

Pozostał najgorszy przypadek, gdy $|D| > \frac{2}{3}n$. Co by było, gdyby udało się znaleźć $\frac{1}{3}$-$\frac{2}{3}$ separator w D o nie więcej niż $2\sqrt{n}$ wierzchołkach ? Okazuje się, że wystarczy połączyć ten separator z $L(t_0) \cup L(t_2)$, za A przyjąć sumę większej części D z mniejszym ze zbiorów C, E, natomiast za B – resztę: sumę mniejszej części D i większego ze zbiorów C i E. Sprawdźmy to. Niech D_1 - mniejsza część D, a D_2 większa. Niech $k = |C| + |E| < \frac{n}{3}$. Załóżmy, że $|E| \geqslant |C|$.

$$|D_1| < \frac{n-k}{2} \quad \text{więc} \quad |D_1| + |E| < \frac{n-k}{2} + k = \frac{n+k}{2} \leqslant \frac{2}{3}n$$

$$|D_2| < \frac{2}{3}(n-k) \quad \text{więc} \quad |D_2| + |C| < \frac{2}{3}(n-k) + \frac{k}{2} = \frac{4n-k}{6} \leqslant \frac{11}{18}n < \frac{2}{3}n$$

Zgadza się. Teraz trzeba jeszcze znaleźć $\frac{1}{3}$-$\frac{2}{3}$ separator w D... Potraktujmy D jako graf $G(D)$, dodatkowo zmodyfikowany w ten sposób, że wszsytkie wierzchołki z $L(t_0+1)$ łączymy z wierzchołkiem s (który też dodajemy do D). Możemy to zrobić nie tracąc planarności (mamy włożenie płaskie D). Dodatkowo załóżmy, że D jest triangulacją. Jeśli nie jest możemy bardzo łatwo striangulować D (w czasie liniowym). Niech T będzie dowolnym drzewem BFS grafu D o korzeniu w s. Zauważmy, że średnica T wynosi co najwyżej $2\sqrt{n}$. Gdyby udało się znaleźć $\frac{1}{3}$-$\frac{2}{3}$ separator w D, który jest ścieżką w T, zakończylibyśmy dowód.

Znajdowanie w triangulacji D o drzewie rozpinającym T ścieżki w T, która jest $\frac{1}{3}$-$\frac{2}{3}$ separatorem dla D

Niech $D = (V_D, E_D)$, $n_d = |V_D|$, oraz $T = (V_D, E_T)$. Nazwijmy *odrostami* krawędzie ze zbioru $E - E_T$. Zauważmy, że dla każdego odrostu $e = u - v$ istnieje ścieżka od u do v w drzewie, która razem z e tworzy cykl $c(e)$. Naszym celem będzie znalezienie takiego odrostu e, że zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz $c(e)$ jest nie więcej niż $\frac{2}{3}n_d$ wierzchołków. Wystarczy wtedy wziąć $c(e)$ jako separator. Będziemy potrzebowali pewnego prostego faktu o grafach dualnych.

Lemat 1. *Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem płaskim i niech G^* będzie grafem dualnym do G. Dla dowolnego $E' \subseteq E$ podgraf (V, E') grafu G posiada cykl wtw gdy podgraf $(V^*, E - E')$ grafu G^* nie jest spójny.*

Dowód jest łatwy i pozostawiamy go czytelnikowi :-) Z tego lematu natychmiast dostajemy:

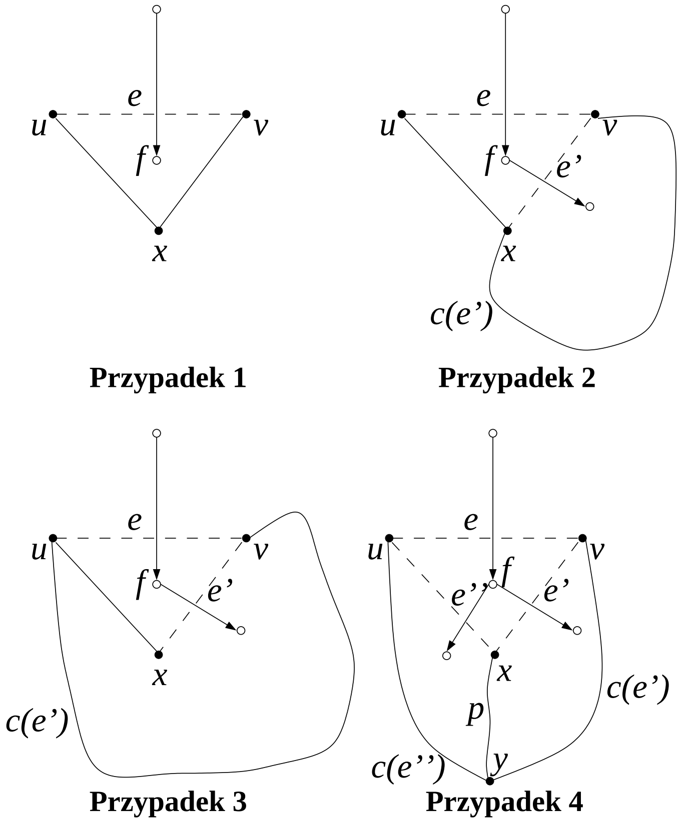
Wniosek 1. *Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem płaskim, a $G^* = (V^*, E)$ grafem dualnym do G. Niech $E' \subseteq E$. Wówczas (V, E') jest drzewem rozpinającym grafu G wtw gdy $(V^*, E - E')$ jest drzewem rozpinającym grafu G^*.*

Jako wniosek z wniosku otrzymujemy, że zbiór odrostów tworzy drzewo rozpinające $T^\#$ w grafie D^*. Wybierzmy dowolną ścianę w D jako korzeń drzewa $T^\#$. Będziemy przeglądać drzewo w kolejności postorder, obliczając następujące informacje dla każdego odrostu :

- $I(e)$ – liczba wierzchołków grafu D znajdujących się wewnątrz cyklu $c(e)$

- $|c(e)|$ – liczba wierzchołków w $c(e)$
- $c(e)$ w reprezenacji listowej

Załóżmy, że krawędzie w $T^{\#}$ mamy skierowane od przodków do potomków. Informacje dla odrostu $e = u - v$ odpowiadającego krawędzi $(f', f) \in E(T^{\#})$ będziemy obliczali podczas przetwarzania wierzchołka f (wszystkie odrosty wychodzące z f są już wtedy przetworzone). Niech x będzie trzecim wierzchołkiem ściany f. Możliwe są cztery sytuacje:



Rysunek 1: Cztery możliwe przypadki podczas przetwarzania krawędzi e

Przypadek 1. f jest liściem w $T^{\#}$.
Wtedy $I(e) = 0$, $|c(e)| = 3$ (pamiętajmy, że D jest striangulowany), $c(e) = [u, v, x]$.

Przypadek 2. W ścianie f są dwa odrosty: e i $e' = x - v$, cykl $c(e')$ nie zawiera u.
Wtedy $I(e) = I(e')$, $|c(e)| = |c(e')| + 1$, $c(e) = [u] \cdot c(e')$.

Przypadek 3. W ścianie f są dwa odrosty: e i $e' = x - v$, cykl $c(e')$ zawiera u.
Wtedy $I(e) = I(e') + 1$, $|c(e)| = |c(e')| - 1$, $c(e') = [x] \cdot c(e)$ (usuwamy x z początku listy $c(e')$).

Przypadek 4. W ścianie f są trzy odrosty: e, $e' = x - v$, $e'' = x - u$.
Niech p będzie wspólną częścią cykli $c(e')$ i $c(e'')$. p jest ścieżką o początku w x. Niech y będzie drugim końcem tej ścieżki. Wtedy

- $I(e) = I(e') + I(e'') + |p| - 1$,
- $|c(e)| = |c(e')| + |c(e'')| - 2|p| + 1$,
- $c(e) = c' \cdot [y] \cdot c''$, gdzie c' i c'' powstają odpowiednio z $c(e')$ i $c(e'')$ przez usunięcie p.

Ponieważ nie zależy nam na zapamiętywaniu obliczonych informacji, możemy wykonać wszystkie powyższe obliczenia w czasie liniowym (korzystając z operaji na listach). Teraz wystarczy pokazać, że znajdziemy taki odrost e, że

$$I(e) \leqslant \frac{2}{3} n_d \quad \text{oraz} \quad n_d - (I(e) + |c(e)|) \leqslant \frac{2}{3} n_d$$

Pokażemy, że jest to pierwszy znaleziony (podczas przeszukiwania postorderem) odrost e, t.ż. $I(e) + |c(e)| \geqslant \frac{n_d}{3}$. Drugi warunek jest już spełniony. Pokażemy że zachodzi pierwszy niezależnie od tego jaki przypadek był rozważany, przy obliczaniu informacji dla e.

Przypadek 1. $I(e) = 0 \leqslant \frac{2}{3} n_d$

Przypadek 2. $I(e) + |c(e)| = I(e') + |c(e')| + 1$ oraz $I(e') + |c(e')| < \frac{n_d}{3}$, więc $I(e) + |(c(e)| \leqslant \frac{n_d}{3}$.

Przypadek 3. $I(e) + |c(e)| = I(e') + |c(e')|$, więc e nie mógł być pierwszym odrostem t.ż. $I(e) + |c(e)| \geqslant \frac{n_d}{3}$.

Przypadek 4. Zarówno $I(e') + |c(e')| < \frac{n_d}{3}$ jak i $I(e'') + |c(e'')| < \frac{n_d}{3}$, a więc:

$$\begin{aligned} I(e) + |(c(e)| &= I(e') + I(e'') + |p| - 1 + |c(e')| + |c(e'')| - 2|p| + 1 \\ &= I(e') + I(e'') + |c(e')| + |c(e'')| - |p| \\ &< \frac{2}{3} n_d - |p| \\ &< \frac{2}{3} n_d \end{aligned} \tag{1}$$

Zakończyliśmy w ten sposób dowód tw. o separatorze. $\square$