Grafy planarne: notatki do ćwiczeń (z o. o.)

Łukasz Kowalik

19 marca 2002

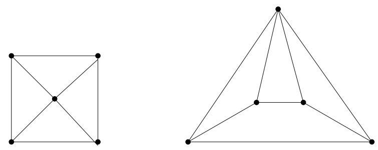
Rysunkiem grafu G nazywamy dowolne odwzorowanie, które

- Wierzchołkom $V(G)$ przyporządkowuje różnowatrościowo punkty płaszczyzny
- Każdej krawędzi $uv \in E(G)$ przyporządkowuje łamaną o krańcach $f(u)$, $f(v)$.

Jeśli dla pewnych krawędzi xy, uv istnieje punkt $p \in f(uv) \cap f(xy)$, taki, że $p \notin \{x, y, u, v\}$, to p nazywamy *przecięciem.*

Definicja. Graf G jest *planarny*, gdy istnieje rysunek G bez przecięć.

Rysunek bez przecięć grafu planarnego nazywamy *grafem płaskim.*



Rysunek 1: Dwa różne rysunki (bez przecięć) tego samego grafu

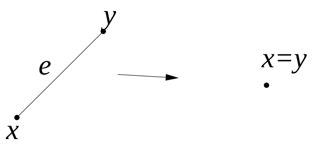
Obszarem nazwiemy każdy zbiór otwarty $U \subseteq R^2$, t.ż. dla dowolnych punktów $u, v \in U$ istnieje łamana zawarta w U o końcach u, v. *Ścianą* w grafie płaskim G nazwiemy każdy maksymalny (ze względu na zawieranie) obszar rozłączny z G.

Twierdzenie 1 (Wzór Eulera 1758). *Dla dowolnego spójnego grafu płaskiego o n wierzchołkach, m krawędziach, f ścianach spełniona jest równość*

$$n - m + f = 2$$

Dowód. Niech G będzie dowolnycm grafem. Indukcja po n.
Dla $n = 1$ graf G jest zbiorem pętli. Dla $m = 0$ mamy jedną ścianę i $1 - 0 + 1 = 2$. Każda dołożona pętla dzieli jakąś scianę na dwie, czyli $m = f - 1$.

Dla $n > 1$, ponieważ G jest spójny, istnieje krawędź $e = uv$, $u \neq v$. Przeprowadzamy kontrakcję krawędzi e otrzymując graf $G' = G/e$.



Rysunek 2: Kontrakcja (ściągnięcie) krawędzi e

Kontrakcja nie zmienia liczby ścian: $f' = f$ ale $n' = n - 1$, $m' = m - 1$. Z założenia ind. $n' - m' + f' = 2$, czyli $n - m + f = 2$. $\square$

Fakt 1. Jeśli w grafie planarnym prostym G są co najmniej 3 wierzchołki, to $m \leqslant 3n - 6$
Jeśli ponadto, w G nie ma trójkątów, to $m \leqslant 2n - 4$.

Dowód. Wystarczy ograniczyć się do grafów spójnych. Ponieważ $n \geqslant 3$, więc $3f \leqslant 2m$. Wtedy

$$3f = 3m - 3n + 6 \leqslant 2m$$

i ostatecznie

$$m \leqslant 3n - 6$$

Podobnie, gdy nie ma trójkątów mamy $4f \leqslant 2m$ i znowu

$$2f = 2m - 2n + 4 \leqslant 2m$$

i kończymy dostając

$$m \leqslant 2n - 4$$

□

Wniosek 1. *K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne.*

Wniosek 2. *W każdym grafie planarnym istnieje wierzchołek stopnia $\leqslant 5$.*

Dowód. Gdyby wszystkie wierzhcołki miały co najmniej 6 sąsiadów, to $2m = \sum_{v \in V} d(v) \geqslant 6n$, czyli $m \geqslant 3n$ a to jest nieprawda. □

Wniosek 3 (Chrobak, Eppstein 1989). *Dla danego grafu planarnego G w czasie $O(n)$ można utworzyć strukturę danych, która odpowiada na zapytania postaci „czy $uv \in E(G)$?" w czasie $O(1)$.*

Jak to zrobić ? Ano, wystarczy zamienić G na graf skierowany G', t.ż. $V(G) = V(G')$ oraz

$$u - v \in E(G) \Leftrightarrow u \rightarrow v \in E(G') \text{ lub } v \rightarrow u \in E(G')$$

oraz taki, że dla każdego wierzchoła $v' \in V(G')$ zachodzi $deg^+(v') \leqslant 5$.

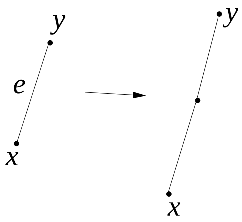
Algorytm
Wejscie: `list[v]` : listy sasiedztwa wierzcholkow
Wyjscie: `shortlist[v]` : lista koncow krawedzi wychodzacych z v w G'.

for each $v \in V$ **do** `deg` $[v] := |$`list`$[v]|$
for each $v \in V$ **do**
  if `deg` $[v] \leqslant 5$ **then** Q.Add (v)

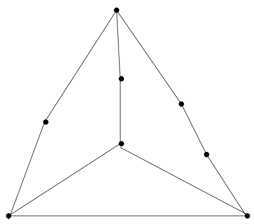
while not Q.Empty **do**
  Q.Remove (v)
  `shortlist[v]` := `list[v]`
  Usun v z list sasiedztwa jego sasiadow
  for each $v \in$ `list[v]` **do**
    `deg` $[v]$:= `deg` $[v]$ - 1
    if `deg` $[v] = 5$ **then** Q.Add (w)

Twierdzenie 2 (Chrobak, Eppstein). *Można to poprawić tak, że $deg^+(v) \leqslant 3$*

Twierdzenie 3 (Kuratowski 1930). *Graf jest planarny wtw gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z K_5 ani $K_{3,3}$.*



Rysunek 3: Podział krawędzi (subdivision)



Rysunek 4: Podział grafu K_4

Implikację $\rightarrow$ już pokazaliśmy (wystarczy ściągnąć ścieżki do krawędzi). Twierdzenie można wyrazić inaczej. *Podziałem krawędzi* (subdivision) będziemy nazywać operację polegającą na zamianie krawędzi uv na ścieżkę długości 2, o końcach u, v.

Podziałem (subdivision) grafu G nazwiemy dowolny graf powstały z G przez ciąg operacji podziału krawędzi.

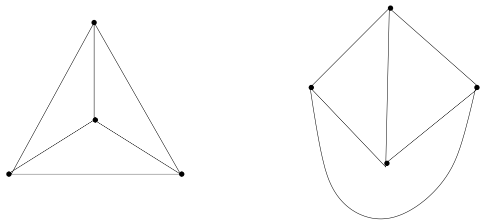
Każdy graf, który jest podziałem K_5 lub $K_{3,3}$ będziemy nazywać *grafem Kuratowskiego.*

Twierdzenie 4. *Graf jest planarny wtw gdy nie zawiera podgrafu Kuratowskiego*

Definicja. Rysunek grafu G jest *wypukłym włożeniem* G, gdy

(i) Każda krawędź jest odwzorowana na odcinek

(ii) Każda ściana (za wyjątkiem zewnętrznej) jest ograniczona przez wielokąt wypukły.



Rysunek 5: Dwa włożenia planarne K_4: wypukłe i nie wypukłe

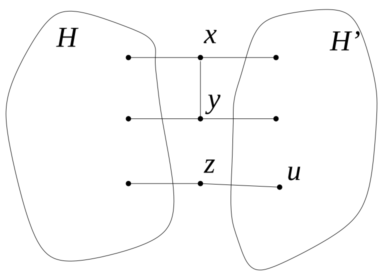
Na dobry początek postaramy się udowodnić twierdzenie Tutte:

Twierdzenie 5 (Tutte 1960). *Jeśli 3-spójny graf G nie zawiera podgrafu Kuratowskiego to istnieje wypukłe włożenie G w płaszczyznę.*

Lemat 1. *Niech G będzie dowolnym grafem 3-spójnym o co najmniej 5 wierzchołkach. Istnieje wtedy krawędź $e \in E(G)$ t.ż. G/e jest 3-spójny.*

Dowód. Załóżmy, że dla dowolnej krawędzi e graf G/e nie jest 3-spójny. Weźmy dowolną taką krawędź $e = xy$. Wtedy w G/e istnieje zbiór separujący $\{z, z'\}$. Do tego zbioru musi należeć wierzchołek powstały po skontraktowaniu krawędzi e. (wpp. $\{z, z'\}$ rozspójnia G). Stąd dla każdej krawędzi $e = xy$ G ma zbiór sepraujący $\{x, y, z\}$.

Wybierzmy teraz z grafu G taką krawędź $e = xy$ oraz wierzchołkek z, że $\{x, y, z\}$ rozspójnia G oraz graf $G - \{x, y, z\}$ zawiera spójną składową H o największej możliwej liczbie wierzchołków. Niech H' będzie inną spójną składową.

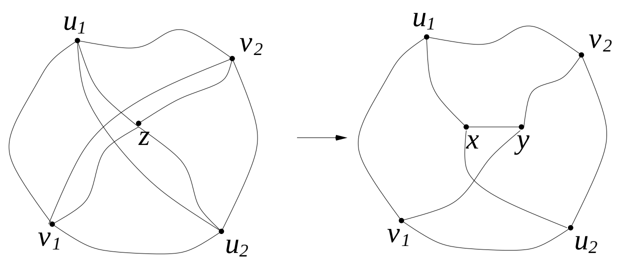


Rysunek 6: Składowe H, H'

Wierzchołki x, y, z mają sąsiadów w H i H'. Niech u będzie sąsiadem z w H'. Wtedy istnieje pewien zbiór {z, u, v} separujący G. Graf $X = G(V(H) \cup \{x, y\})$ jest spójny. Ale $Y = G(V(H) \cup \{x, y\}) - v$ też jest spójny, bo $G - \{v, z\}$ jest spójny. Stąd Y jest podgrafem pewnej spójnej składowej H'' grafu $G - \{z, u, v\}$. W takim razie $|H''| \geqslant |Y| = |H| + 1$, czyli sprzeczność, bo H miał być największy. □

Lemat 2. *Jeśli graf G/e zawiera podgraf Kuratowskiego, to G też zawiera podgraf Kuratowskiego.*

Dowód. Niech H będzie podgrafem Kuratowskiego w G/e. Niech $e = xy$ i $z \in V(G/e)$ będzie wierzchołkiem powstałym po kontrakcji x z y. Jeśli $z \notin H$, to $H \subseteq G$. Załóżmy więc, że $z \in H$. Jeśli teraz $d_H(z) \leqslant 2$, to G zawiera podgraf Kuratowskiego (jest to H lub podział H). Możemy więc przyjąć, że $d_H(z) \geqslant 3$.
A. Co najwyżej 1 krawędź z H incydentna z z jest incydentna z x w G. Graf otrzymany z H przez rozciągnięcie z na krawędź xy jest podziałem H oraz podgrafem G.
B. Każdy z wierzchołków x, y sąsiaduje z co najmniej dwoma krawędziami z H. Wtedy H jest podziałem K_5. Jak widać na rysunku, po usunięciu ścieżek $u_1 - u_2$, $v_1 - v_2$ otrzymujemy podział $K_{3,3}$ w G.



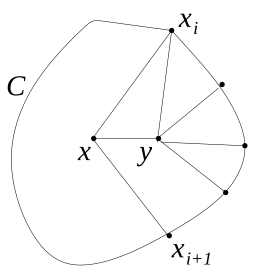
Rysunek 7: W G istnieje podział $K_{3,3}$

□

Teraz możemy już pokazać tw. Tutte:

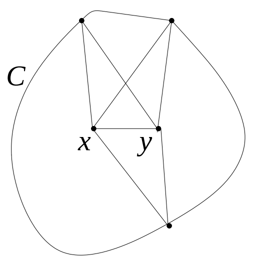
Dowód tw. Tutte. Indukcja po $|V|$. Jedyny graf 3-spójny o co najwyżej 4 wierzchołkach to K_4 (dlaczego ?), który ma wypukłe włożenie, więc załóżmy, że $n \geqslant 5$. Niech $e = xy$ będzie krawędzią taką, że G/e jest 3-spójny (z lematu 1 e istnieje). Niech z będzie wierzchołkiem powstałym z xy po kontrakcji. Z lematu 2 G/e nie ma podgrafu Kuratowskiego, więc z założenia indukcyjnego G/e ma wypukłe włożenie.

Niech C będzie cyklem ograniczającym ścianę zawierającą z w grafie G/e, z którego usunięto krawędzie incydentne z z. Niech $x_1, x_2, \ldots x_k$ będzie ciągiem kolejnych sąsiadów x.
Przypadek 1. Sąsiedzi y leżą na C pomiędzy x_i a x_{i+1} dla pewnego i. Wystarczy umieścić y w obszarze ograniczonym przez xx_i, xx_{i+1} i cykl C.



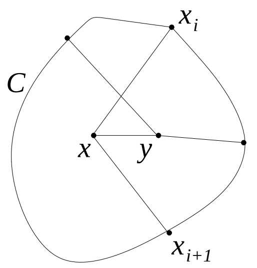
Rysunek 8: Przypadek 1

Przypadek 2. x i y mają co najmniej 3 wspólnych sąsiadów. Wtedy G zawiera podział K_5.



Rysunek 9: Przypadek 2

Przypadek 3. Nie zachodzą poprzednie przypadki i pewien sąsiad y leży na C pomiędzy x_i a x_{i+1}, a inny pomiędzy x_j a x_{j+1}, $i \neq j$. Wtedy G zawiera podział $K_{3,3}$.



Rysunek 10: Przypadek 3

□

Żeby udowodnić tw. Kuratowskiego musimy jeszcze sprowadzić je do przypadku grafu 3-spójnego. Wystarczą w tym celu cztery proste fakty.

Fakt 2. Każda ściana grafu płaskiego G może być ścianą zewnętrzną przy innym włożeniu.

Fakt 3. Każdy minimalny graf nieplanarny jest 2-spójny.

Lemat 3. *Niech $S = \{x, y\}$ separuje G. Niech G_1, G_2 będą podgrafami G t.ż. $G_1 \cup G_2 = G$ i $V(G_1) \cap V(G_2) = S$. Niech $H_i = G_i \cup \{xy\}$. Jeśli G nie jest planarny to jeden z grafów H_1, H_2 też nie jest planarny.*

Dowód. Załóżmy, że H_1 i H_2 są planarne. Z lematu 2 krawędź xy może leżeć na ścianach zewnętrznych H_1 i H_2. Ale teraz wystarczy skleić rysunki H_1 i H_2 (być może usuwając krawędź xy) aby otrzymać włożenie G bez przecięć. □

Lemat 4 (już ostatni !). *Niech G będzie nieplanarny i nie zawiera podgrafu Kuratowskiego. Spośród wszystkich grafów spełniających te własności G ma najmniej krawędzi. Wtedy G jest 3-spójny.*

Dowód. Z faktu 3 G jest 2-spójny. Załóżmy więc, że istnieje zbiór separujący $S = \{x, y\}$. Niech G_0 oznacza pewną spójną składową w $G - S$. Weźmy teraz $G_1 = G(G_0 \cup S)$ i $G_2 = G - G_0$. Niech H_1, H_2 będą grafami z lematu 3. Wtedy H_1 lub H_2 jest nieplanarny. Załóżmy że H_1 nie jest planarny. Ponieważ H_1 zawiera mniej krawędzi niż G, więc H_1 zawiera podgraf Kuratowskiego. Wtedy G też ma podgraf Kuratowskiego, gdyż między x a y istnieje ścieżka w G_2 (bo G jest 2-spójny). □

Powyższy lemat można sformułować tak: minimalny kontrprzykład dla tw. Kuratowskiego jest 3-spójny (jeśli istnieje). Ale przecież udowodnione wcześniej tw. Tutte mówi, że dla grafów 3-spójnych tw. Kuratowskiego jest prawdziwe. Nie istnieje więc minimalny kontrprzykład i tw. Kuratowskiego jest udowodnione. Takie podejście „minimalnego kontrprzykładu" pojawia się często w teorii grafów, np. w słynnym dowodzie tw. czterech barw.