1 Twierdzenie o kolorowaniu ścianowym

Formułuję tu fakty bez dowodów. Odsyłam do naszej pracy.

Prawie-triangulacja to graf płaski, którego wszystkie ściany wewnętrzne są trójkątami. Zaczynamy od prostych lematów:

1. Każda prawie-triangulacja jest 3-kolorowalna.

2. Parzysta, 3-kolorowalna prawie-triangulacja ma zewnętrzną ścianę długości podzielnej przez 3.

3. Dla każdego i podzielnego przez 3 istnieje parzysta, 3-kolorowalna prawie-triangulacja o ścianie zewnętrznej długości i.

Zastanawiamy się teraz nad prawie-triangulacjami wewnętrznie parzystymi. Jakie warunki spełniają wierzchołki takiego grafu? Oczywiście liczba wierzchołków o nieparzystych stopniach na zewnętrznej ścianie jest parzysta. Okazuje się, że można powiedzieć więcej:

Lemat 1. *Jeśli pomalujemy krawędzie na ściane zewnętrznej pomiędzy kolejnymi wierzchołkami nieparzystymi na czarno a pozostałe krawędzie na biało to liczba czarnych i bialych krawędzi na ścianie zewnętrznej przystają mod 3.*

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

Lemat 2. *Cykl o krawędziach pomalowanych na bialo i czarno tak, że liczby bialych i czarnych krawędzi przystają mod 3, można dopełnić do prawie-triangulacji tak, że wierchołki o nieparzystych stopniach leżą na końcach czarnych ścieżek.*

Do sformułowania głównego twierdzenia potrzeba kilku definicji. Dany jest graf płaski, 2-spójny G. *Stronami* nazywamy pary (e, f) gdzie e to krawędź incydentna ze ścianą f. Kolorowanie stonicowe to przyporządkowanie stronom kolorów ze zbioru $\{biay, czarny\}$. Można powiedzieć, że krawędź ma dwie strony. Krawędzie o obu stronach bialych lub czarnych nazywamy *jednokolorowymi.* Mówimy, że kolorowanie stronicowe jest *dobre* jeśli spełnia dwa warunki:

1. w każdej ścianie liczby czarnych i białych stron są równe mod 3

2. każdy wierzchołek jest incydentny z parzystą liczbą jednokolorowych krawędzi

Twierdzenie 1. *Dla 2-spójnego grafu płaskiego G następujące warunki są równoważne*

1. *G jest 3-kolorowalny*

2. *G jest podgrafem parzystej triangulacji*

3. *G ma dobre kolorowanie stronicowe*

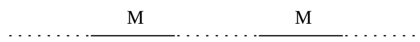
2 Skojarzenia w grafach dwudzielnych

2.1 Wstępne pojęcia

Graf *dwudzielny* to taki graf że jego wierzchołki można podzielić na zbiory A i B, takie, że wszystkie krawędzie grafu łączą wierzchołek z A z wierzchołkiem z B. *Skojarzenie* w grafie G to zbiór rozłącznych krawędzi $M \subset E(G)$.

Podstawowym problemem jest znalezienie maksymalnego co do liczności skojarzenia w grafie. Dla grafów dwudzielnych problem ten nazywa się „problemem małżeństw".

Mamy graf G i pewne skojarzenie M. *Scieżka rozszerzająca* to ścieżka w G zaczynająca się i kończąca krawędzią $\notin M$, w której co druga krawędź jest $\in M$.



Operacja $\oplus$ to różnica symetryczna. Zdefiniowana dla zbiorów: $A \oplus B =^{df} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Często używamy jej w odniesieniu do grafów - traktując grafy jako zbiory krawędzi. Czyli dla grafów $G = (V_G, E_G)$ i $H = (V_H, E_H)$ za $G \oplus H$ bierzemy graf indukowany przez zbiór krawędzi $E_G \oplus E_H$.

Łatwo zauważyć, że używając ścieżki roszerzającej S łatwo powiększyć skojarzenie. Wystarczy wziąć skojarzenie $\widetilde{M} = M \oplus S$.

2.2 Metaalgorytm

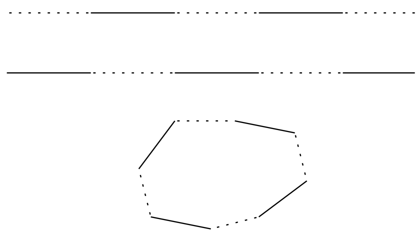
Algorytm szukający maksymalnego skojarzenia może działać w następujący sposób. Początkowo wziąć $M = \emptyset$. Szukać ścieżki rozszerzającej i dopóki istnieje i powiększać M. Oznaczmy liczbę krawędzi i wierzchołków przez m i n. Algorytm wykona co najwyżej m kroków, każdy krok to przejżenie grafu BFS-em kosztujące $m + n$.

2.3 Algorytm Hopcrofta-Karpa

Musimy uzasadnić poprawność metaalgorytmu. Dlaczego dla skojażenia nie maksymalnego istnieje ścieżka rozszeżająca? Ponadto pokażemy, że jeśli ścieżki rozszeżające wybiera się odpowiednio to czas algorytmu spadnie do $\sqrt{m} * (m + n)$. Najpierw parę lematów.

Lemat 3. *Mamy graf G i dwa skojażenia M oraz M_{max}, przy czym M_{max} jest maskymalne. W G istnieje co najmniej $|M_{max}| - |M|$ rozłącznych wierzchołkowo ścieżek rozszerzających M.*

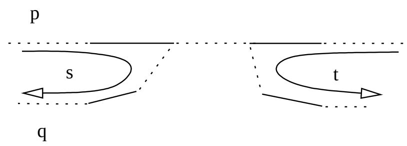
Dowód. Popatrzmy na graf $M \oplus M_{max}$. Wierzchołki są w nim stopnia co najwyżej 2. Jego spójne składowe są więc jednej z postaci:



Ponieważ w grafie $M \oplus M_{max}$ krawędzi kropkowanych (tych z M_{max}) jest wiecej niż ciągłych (tych z M) o $M \oplus M_{max}$ więc składowych 2 typu jest co najmniej $M \oplus M_{max}$ a są to właśnie ścieżki rozszeżające. $\square$

Wniosek 1. *Dla dowolnego grafu i nie maksymalnego skojarzenia istnieje ścieżka rozszeżająca.*

Lemat 4. *Mamy graf G, skojażenie M i ścieżkę rozszerzającą p o minimalnej długości. Dla dowolnej ścieżki q rozszeżającej $M \oplus p$ zachodzi: $|q| \geq |p| + 2|p \cap q|$*



Dowód. Jeśli p i q są rozłączne sprawa jest oczywista, drugi przypadek mamy na rysunku. Na podstawie p i q można skonstruować ścieżki s i t również rozszeżające M. Z minimalności p: $|s| \leq |p|$ i $|t| \leq |p|$. Teraz obliczamy $|q| = |s| + |t| - |p| + 2|p \cap q| \geq |p| + 2|p \cap q|$. $\square$

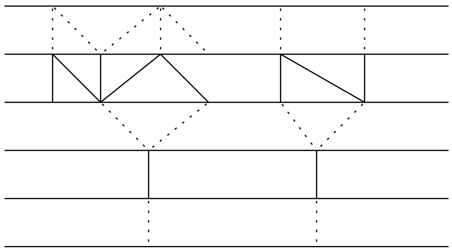
Teraz opiszemy algorytm

1. $M := \emptyset$
2. powtarzaj co następuje dopóki istnieje ścieżka rozszeżająca

3. szukaj ścieżek rozszeżających BFS, z wszystkich wolnych wierzchołków na raz

4. powiększaj M

Krok 3 narysowany jest na rysunku. Tworzymy graf warstwowy BFS w pierwszej warstwie leżą wierchołki rozłączne z M czyli wolne. W warstwie parzystej umieszczamy wierzchołki nieodwiedzone osiągalne krawędzią spoza M, w warstwie nieparzystej wierzchołki nieodwiedzone osiągalne krawędzią z M.



Twierdzenie 2. *Algorytm Hopcrofta-Karpa wykonuje co najwyżej* $3/2 * \sqrt{m}$ *kroków.*

Dowód. Z lematu 4 wynika, że w każdej kolejnej fazie długość minimalnej ścieżki rozszeżającej rośnie o 2. Oznaczmy skojażenie otrzymane po $\sqrt{m}/2$ fazach przez M. Minimalna ścieżka rozszerzająca M ma dlugość co najmniej $\sqrt{m}$. Może isnieć zatem co najwyżej $\sqrt{m}$ rozłącznych wierzchołkowo ścieżek rozszeżających M. Z lematu 3 $|M_{max}| - |M| \leq \sqrt{m}$. Po kolejnych $\sqrt{m}$ fazach otrzymamy maksymalne skojażenie. □