

Kognitywistyka, zadania 14, funkcje dwóch zmiennych

1. Opisz i naszkicuj dziedzinę funkcji:

$$\begin{aligned} a(x, y) &= \frac{xy^2}{x+y^2}, & b(x, y) &= \ln(x - 2y^2 - 1), & c(x, y) &= \frac{\sqrt{xy}}{\sin(x+y)}, & d(x, y) &= \sqrt{xy - 1}, \\ e(x, y) &= \frac{\sqrt{x^2+y^2-4}}{x-2y}, & f(x, y) &= \sqrt{y - x^2 - 4} + \ln(x - 4), & g(x, y) &= \ln(x - y) + \sqrt{y + 2 + x}. \end{aligned}$$

2. Naszkicuj po kilka poziomicy funkcji $b(x, y)$, $d(x, y)$ z poprzedniego zadania oraz funkcji $F(x, y) = x^2 - y^2$ i $G(x, y) = x^2 + y^2$.

3. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji: $m(x, y) = x^5 \ln(xy)$, $n(w, z) = \sin(3w^2z^3 - w)$,
 $o(p, q) = \sqrt[3]{p^2q^5} + \ln(p^3 - q)$, $p(m, n) = (m + 3n)^5$, $r(s, t) = te^{s^2t}$, $s(u, v) = \frac{\sin u}{\cos 2v}$, $t(j, k) = \frac{\ln k}{jk}$,
 $u(c, d) = \cos(3c + d) \sin(d^2)$, $w(y, z) = \frac{ye^z}{z}$, $x(s, t) = e^s \sin e^t$, $y(a, b) = \frac{e^a}{e^b + ab}$, $z(x, y) = \frac{\ln(xy^2)}{x \ln y}$.

4. Oblicz przybliżoną wartość wyrażenia:

$$a) \sqrt[4]{2.11^2 + 3 \cdot 1.95^2}, \quad b) \ln(1.02 + \sin 0.03), \quad c) \ln \sqrt{5.12 - 2.03^2}.$$

5. Znajdź gradient funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) , jeśli:

$$\begin{aligned} a) f(x, y) &= 5\sqrt[4]{x^2y}, (x_0, y_0) = (2, 4), & b) f(x, y) &= -xy^2, (x_0, y_0) = (1, 1), \\ c) f(x, y) &= \sin(x + 2y), (x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), & d) f(x, y) &= e^{x^2y+x}, (x_0, y_0) = (1, 2). \end{aligned}$$

6. Znajdź wszystkie ekstrema lokalne i punkty siodłowe funkcji $F(x, y) = e^y(x^2 + 6y^2)$.

7. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji: a) $f(x, y) = (x - y^2)e^x$. b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12xy$,
c) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy - 6x - 10y + 1$. d) $g(x, y) = x^3 - 48x + y^3 - 6y^2 + 9y + 10$.

8. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y$ wiedząc, że jej punkty stacjonarne to: $P_1 = (3; 1)$, $P_2 = (-3; -1)$, $P_3 = (1; 3)$, $P_4 = (-1; -3)$.

9. Znajdź punkty stacjonarne funkcji $F(x, y) = x^3 + y^2 + 2xy - 21$. Dla każdego z nich zbadaj, czy F przyjmuje w nim ekstremum lokalne (a jeśli tak, to jakie) i czy jest to punkt siodłowy.

10. Dla każdego z punktów $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (1, 1)$, $p_3 = (1, -1)$, $p_4 = (2, 1)$, $p_5 = (2, -2)$ sprawdź, czy jest on punktem stacjonarnym funkcji dwóch zmiennych $g(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$. Następnie sprawdź, czy w którymś z tych punktów funkcja g osiąga ekstremum lokalne i jakie.

11. Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $F(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$ na kole $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ wiedząc, że funkcja F je przyjmuje.

12. Znajdź trzy liczby dodatnie x, y, z tak, żeby $3x + 2y + z = 36$ oraz żeby ich iloczyn był największy.

13. Znajdź wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $f(x, y)$ na zbiorze G (wiedząc, że one istnieją), jeśli $f(x, y) = xy^2$, $G : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3$.

14. Znajdź maksimum i minimum funkcji $x^2 + y^2$ przy warunku $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$.

15. Niech $f(x, y) = 2y^2 + x^2 - \frac{x^3}{3}$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. a) Znajdź ekstrema lokalne i punkty siodłowe funkcji $f(x, y)$. Dla każdego z ekstremów określ, czy to minimum, czy maksimum lokalne. b) Znajdź przynajmniej jeden punkt, w którym funkcja f ma minimum lokalne na okręgu G o równaniu $x^2 + y^2 = 4$ oraz przynajmniej jeden punkt, w którym f ma maksimum lokalne na okręgu G .