

Kognitywistyka, zadania 13, iloczyn skalarny

1. Oblicz iloczyny skalarne: $\langle (1, 2, 3, 4), (1, 1, 3, -3) \rangle$; $\langle (2, 4, 6, 8), (12, -9, 6, -3) \rangle$; $\langle (55, 65, -75), (21, 14, 28) \rangle$.
2. Oblicz odległość między punktami $A = (2, 3, -5)$, $B = (4, 9, 4)$.
3. Znajdź długości boków trójkąta ABC , jeśli $A = (1, 2, 3, 4)$, $B = (6, 5, 4, 3)$, $C = (-4, 1, -4, -1)$.
4. Niech W oznacza podprzestrzeń liniową wymiaru k przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wykaż, że zbiór $W^\perp := \{u \in \mathbb{R}^n : \forall_{w \in W} u \perp w\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Znajdź jej wymiar.
5. Znajdź wszystkie wektory $v \in \mathbb{R}^3$ prostopadłe do wektorów $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$.
6. Znajdź wszystkie wektory $v \in \mathbb{R}^3$ prostopadłe do wszystkich rozwiązań układu równań $\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$
7. Znajdź kąt między wektorami: a) $(2, 3, 4, 5)$, $(5, 0, -2, 4)$; b) $(1, 2, -1, 2)$, $(-1, 0, 0, 3)$.
8. Opisz układem równań oraz znajdź bazę przestrzeni $[\text{lin}((1, 1, 1), (2, -1, 1))]^\perp$.
9. Niech $W = \text{lin}((1, 1, -1, 1), (3, 3, -1, 1), (2, 0, -1, 3))$. a) Zbadaj, czy układ $(1, 1, -1, 1)$, $(3, 3, -1, 1)$, $(2, 0, -1, 3)$ jest ortogonalny. b) Jeśli nie jest, to znajdź bazę ortogonalną przestrzeni W . c) Znajdź bazę ortonormalną przestrzeni W . d) Dopełnij znalezioną bazę przestrzeni W do bazy ortonormalnej $\mathbb{R}^4$.
10. Niech $W \subset \mathbb{R}^4$ oznacza zbiór rozwiązań równania $2w - 2x - y + z = 0$. Przedstaw wektor $u = (10, 0, 20, 30)$ w postaci sumy takich wektorów $v, w \in \mathbb{R}^4$, że $v \perp W, w \in W$.
11. Niech $w = (1, 2, 2)$. Znajdź bazę ortogonalną przestrzeni $w^\perp = \{u \in \mathbb{R}^3 : u \perp w\}$.
12. Wykaż, że przekształcenie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest izometrią liniową wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $1 \leq i, j \leq n$ zachodzi równość $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$.
13. Znajdź te wartości parametru a , dla których przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o macierzy $\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}$ jest izometrią liniową.
14. Przekształcenie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ma macierz $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ w bazie standardowej. a) Wykaż, że f jest izometrią liniową. b) Zbadaj, czy jest obrotem (a jeśli tak, to o jaki kąt), czy symetrią względem prostej (a jeśli tak, to opisz tę prostą).
15. Znajdź macierz symetrii prostopadłej σ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ względem płaszczyzny $H = \text{lin}((2, 1, -2), (2, -2, 1))$ (w bazie standardowej). Wsk. Najpierw znajdź macierz w innej, dogodnej bazie.
16. Znajdź macierz symetrii prostopadłej σ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ względem prostej $H = \text{lin}((1, 2, 2))$ (w bazie standardowej). Wsk. Najpierw znajdź macierz w innej, dogodnej bazie.
17. Znajdź macierz rzutu prostopadłego π przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na płaszczyznę $H : x + 4y + 8z = 0$ (w bazie standardowej).
18. Znajdź macierz rzutu prostopadłego π płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ na prostą $L : 3x + 4y = 0$ (w bazie standardowej). Wsk. Najpierw znajdź macierz w innej, dogodnej bazie.
19. Wektory $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 0, -1)$, $w = (0, 3, -2)$ są wektorami własnymi macierzy $M = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$. Opisz sens geometryczny przekształcenia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ danego wzorem $f(x, y, z) = (6x - 2y - 3z, -2x + 3y - 6z, -3x - 6y - 2z)$.
20. Wektor $u = (2, 2, 1)$ jest wektorem własnym macierzy $M = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -8 \\ -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix}$. Opisz sens geometryczny przekształcenia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o macierzy M w bazie standardowej.